

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
2016
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .
Μονάδες 7
- A2.** Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;
Μονάδες 4
- A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.
Μονάδες 4
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\alpha) - G(\beta)$.
- β)** Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- γ)** Κάθε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.
- δ)** Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .
- ε)** Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .
Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- B1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f .
Μονάδες 6

- B2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης
Μονάδες 9
- B3.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
Μονάδες 7
- B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **B1**, **B2**, **B3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)
Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

- Γ1.** Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
Μονάδες 4
- Γ2.** Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
Μονάδες 8
- Γ3.** Αν $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.
Μονάδες 4
- Γ4.** Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Γ3**, να λυθεί η εξίσωση:
$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x + 3) - f(x)$$

όταν $x \in [0, +\infty)$.
Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta\mu x \, dx = \pi$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$
- $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Δ1.** Να δείξετε ότι $f(\pi) = \pi$ (μονάδες 4) και $f'(0) = 1$ (μονάδες 3).
Μονάδες 7
- Δ2.** α) Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 4)
β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 2)
Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι $0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 262.
A2. Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 141.
A3. Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 246.
A4. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)' = \frac{(x^2)' \cdot (x^2+1) - x \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x \cdot (x^2+1) - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \\
 &= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.
 \end{aligned}$$

Προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f			
Τοπ. Ελάχιστο f(0)=0			

Έτσι προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 0, το $f(0)=0$.

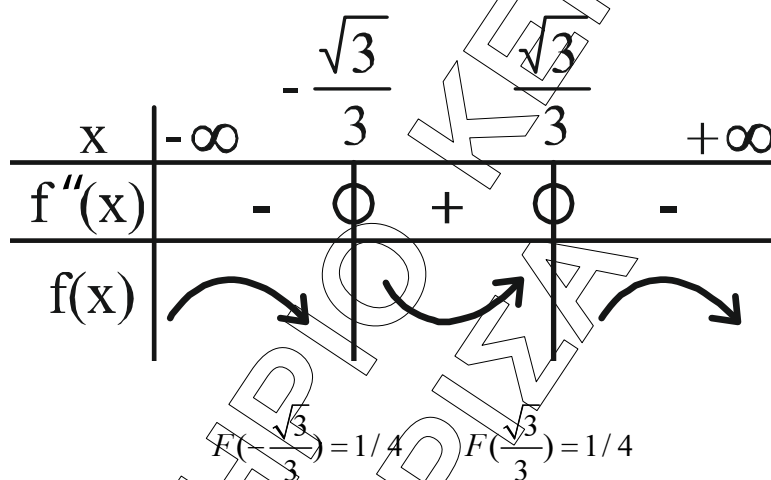
B2.
$$f''(x) = \left(\frac{2x}{(x^2+1)^2} \right)' = \frac{(2x)'(x^2+1)^2 - 2x[(x^2+1)']}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{2(x^2+1)^2 - 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1)^2 - 8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2+1)[2(x^2+1) - 8x^2]}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)(2x^2+2-8x^2)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2+1)(2-6x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1)(1-3x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1)(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x)}{(x^2+1)^4}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



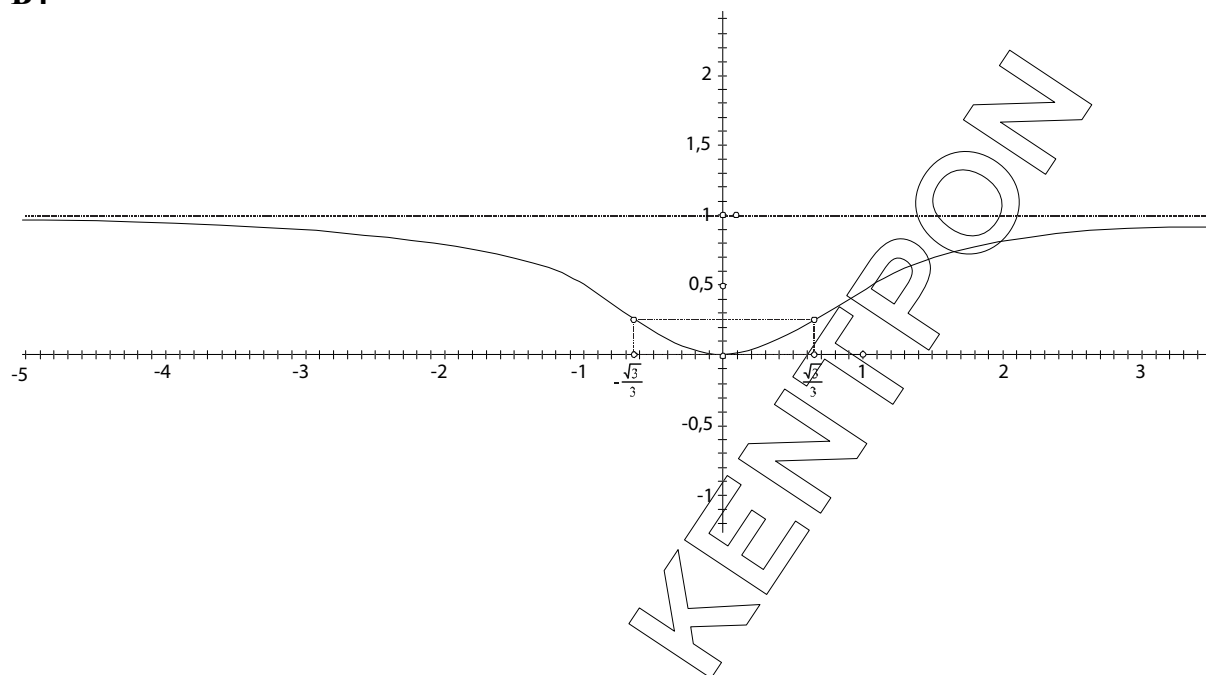
Προκύπτει ότι η f είναι κοίλη στα $(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ $[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$, είναι κυρτή στο $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$,

ενώ παρουσιάζει Σ.Κ. στις θέσεις $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

B3

Η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες, αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$, f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=1$ και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $K(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$

$$K(0) = e^0 - 1 = 0$$

$$K'(x) = 2x \cdot e^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Η συνάρτηση $g(x) = e^x$ είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\text{είναι: } x^2 > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > e^0 \Leftrightarrow e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 > 0$$

Έτσι προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
2x	-	0	+
$e^{x^2} - 1$	+	0	+
$K'(x)$	-	0	+
K(x)			

Άρα για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι $K(x) > 0$, ενώ $K(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Δηλαδή η εξίσωση $K(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$.

Δεύτερος τρόπος: Μπορεί να τεθεί $x^2 = t$, οπότε ισοδύναμα αρκεί να λυθεί η εξίσωση $e^t - t - 1 = 0$ με $t \geq 0$. Θα χρησιμοποιηθεί τότε ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης $\varphi(t) = e^t - t - 1$, που παραπέμπει σε σχετική άσκηση του σχολικού βιβλίου. (άσκ. 3 σελ. 269)

Γ2 Για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$: $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1) \neq 0$, λόγω του ερωτήματος Γ1.

Η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ και δεν μηδενίζεται σε αυτά, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

$$\bullet \text{ Για } x \in (0, +\infty): \left(f(x) - (e^{x^2} - x^2 - 1)\right) \cdot \left(f(x) + (e^{x^2} - x^2 - 1)\right) = 0 \quad (1)$$

Αν $f(x) > 0$ για $x \in (0, +\infty)$, τότε επειδή $e^{x^2} - x^2 - 1 > 0$, από την (1) προκύπτει ότι $f(x) - (e^{x^2} - x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$

Αν $f(x) < 0$ για $x \in (0, +\infty)$, τότε επειδή $-(e^{x^2} - x^2 - 1) < 0$, από την (1) προκύπτει ότι $f(x) + (e^{x^2} - x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$

$\bullet$ Για $x \in (-\infty, 0)$

Αν $f(x) > 0$ για $x \in (-\infty, 0)$, τότε από την (1) προκύπτει ότι $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$

Αν $f(x) < 0$ για $x \in (-\infty, 0)$, τότε από την (1) προκύπτει ότι $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$.

Έτσι προκύπτει ότι

α) $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$ ή

β) $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1), x \in \mathbb{R}$ ή

γ) $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \in [0, +\infty) \\ -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$ ή

δ) $f(x) = \begin{cases} -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x \in [0, +\infty) \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

Γ3. $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1)$$

$$f''(x) = 2e^{x^2} + 2xe^{x^2} \cdot 2x - 2 = 2(e^{x^2} - 1) + 4x^2 \cdot e^{x^2}$$

Προκύπτει ότι $f''(0) = 0$, ενώ επειδή στο ερώτημα Γ1, αποδείχθηκε ότι

$e^{x^2} - 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow (f'(x))' > 0$ στο $\mathbb{R}^*$, ενώ

$f''(0) = 0$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα f κυρτή.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x+3) - f(x), x \in \mathbb{R}$

$$\text{Είναι } g'(x) = f'(x+3) - f'(x) = 3 \frac{f'(x+3) - f'(x)}{(x+3) - x} = 3f''(\xi),$$

όπου $\xi \in (x, x+3)$. (Από Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[x, x+3]$).

Άρα $g'(x) > 0$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$, λόγω του Γ3.

Η $g(x)$ επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, άρα και 1-1.

Η δοθείσα εξίσωση τώρα γράφεται $g(|\eta\mu x|) = g(x)$.

Αφού είναι 1-1, προκύπτει ότι $|\eta\mu x| = x, x \in [0, +\infty) \Leftrightarrow |\eta\mu x| = |x|, x \in [0, +\infty)$.

Η ισότητα αυτή ισχύει μόνον όταν $x = 0$ (σχολικό βιβλίο σελ. 170).

Παρατήρηση: Το συμπέρασμα ότι η $g'(x) > 0$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$, μπορεί να εξαχθεί και από την μονοτονία της f' (λόγω του ερωτ. Γ3).

Για κάθε $x \in [0, +\infty)$, είναι $x+3 > x$ άρα $f'(x+3) > f'(x)$ και συνεπώς $f'(x+3) - f'(x) > 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \cdot \eta\mu x \, dx = \pi \Rightarrow \int_0^{\pi} f(x) \cdot \eta\mu x \, dx + \int_0^{\pi} f''(x) \cdot \eta\mu x \, dx = \pi \Rightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \cdot (-\sigma\upsilon\nu x)' \, dx + \int_0^{\pi} (f'(x))' \cdot \eta\mu x \, dx = \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -[\sigma\upsilon\nu x \cdot f(x)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu x \cdot f'(x) \, dx + [f'(x) \cdot \eta\mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx = \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\pi) + f(0) = \pi \quad (1)$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \eta\mu x \right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$\text{Αφού } f \text{ συνεχής στο } x = 0 \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0. \text{ Δηλαδή } f(0) = 0.$$

$$\text{Άρα από (1)} \Rightarrow f(\pi) = \pi.$$

$$\text{Έχουμε } \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{1}{\frac{x}{\eta\mu x}}, \quad x \neq 0.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{1}{\frac{x}{\eta\mu x}} \right) = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$$

$$\text{Δηλαδή } f'(0) = 1.$$

Δ2. α) Από την σχέση $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ παραγωγίζοντας έχουμε

$$e^{f(x)} f'(x) + 1 = f'(f(x)) f'(x) + e^x \quad (2)'$$

Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε από Θ.

$$\text{Fermat } f'(x_0) = 0 \quad (3)$$

Από τη σχέση (2) για $x = x_0$ έχουμε:

$$e^{f(x_0)} f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) f'(x_0) + e^{x_0} \Rightarrow e^{x_0} = 1 \Rightarrow x_0 = 0.$$

Επομένως θα είναι $f'(0) = 0$, άτοπο διότι $f'(0) = 1$.

Άρα η f δεν παρουσιάζει κανένα ακρότατο.

Σημ. Επίσης αποδείχθηκε ότι $f'(x_0) \neq 0$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, κάτι που θα μας χρειαστεί στο αμέσως επόμενο ερώτημα.

β) Στο ερώτημα Δ2α αποδείχθηκε $f'(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Όμως η f' είναι συνεχής αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, άρα η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $f'(0) = 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$ δηλαδή η f είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Αφού f συνεχής και γνησίως αύξουσα θα έχει σύνολο τιμών το

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right).$$

Όμως $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\text{Έχουμε } \left| \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \right| = \frac{|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|} \leq \frac{|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|} \leq \frac{2}{|f(x)|}$$

και αφού f αύξουσα, για $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0$.

$$\text{Έτσι } \left| \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \right| \leq \frac{2}{f(x)} \Leftrightarrow -\frac{2}{f(x)} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{f(x)} = 0 \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{f(x)} = 0.$$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$.

Δ4. Θέτουμε $\ln x = u \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot dx = du$

$$\text{Για } x = 1 \Rightarrow u_1 = \ln 1 = 0$$

$$\text{Για } x = e^\pi \Rightarrow u_2 = \ln e^\pi = \pi$$

$$\text{Έτσι } \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^\pi f(u) du$$

$$\text{Αρκεί να δείξουμε ότι } 0 < \int_0^\pi f(u) du < \pi^2 \quad (1)$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi] \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(\pi)$

(η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \pi$ και για $x = 0$)

$$\Rightarrow f(x) \leq \pi \Rightarrow \pi - f(x) \geq 0, \quad x \in [0, \pi] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} (\pi - f(x)) dx > 0 \quad (\text{γιατί η } \pi - f(x) \text{ δεν μηδενίζεται παντού στο } [0, \pi]) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \pi dx - \int_0^{\pi} f(x) dx > 0 \Rightarrow \pi^2 > \int_0^{\pi} f(x) dx \quad (2)$$

$$\text{Ομοίως } f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow \int_0^{\pi} f(x) dx > 0 \quad (3)$$

$$\text{Από (2), (3)} \Rightarrow 0 < \int_0^{\pi} f(x) dx < \pi^2 \text{ δηλαδή ισχύει η (1).}$$