

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
2017
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 7

A2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο x_0 , είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α αν είναι αληθές, ή το γράμμα Ψ αν είναι ψευδές. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α.** (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Αν $0 < a < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$.

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 5

B2. Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x \in (0, 1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

B3. Αν $\varphi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

B4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ και το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες (ε_1) , (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το A , τις οποίες και να βρείτε.

Μονάδες 8

Γ2. Αν $(\varepsilon_1): y = -x$ και $(\varepsilon_2): y = x - \pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**, τότε να σχεδιάσετε τις (ε_1) , (ε_2) και τη γραφική παράσταση της f , και να αποδείξετε ότι $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) , (ε_2) και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi}$.

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \eta \mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$

- Δ1.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, \pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 5

- Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

- Δ3.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τη γραφική παράσταση της g , με $g(x) = e^{5x}$, $x \in \mathbb{R}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = \pi$.

Μονάδες 6

- Δ4.** Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία, Σελ. 135 σχολικού βιβλίου.

A2. α. Ψ

β. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$, είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, διότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Όμως $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$, ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Άρα η f ενώ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

A3. Μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, b) και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ και } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

A4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι

$$f(x) = \ln x, \quad x \in (0, +\infty) = A_f$$

$$g(x) = \frac{x}{1-x}, \quad x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) = A_g$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$ είναι:

$$\begin{aligned} A_{f \circ g} &= \left\{ x \in A_g, \text{ ώστε } g(x) \in A_f \right\} = \left\{ x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty), \text{ ώστε } \frac{x}{1-x} \in (0, +\infty) \right\} = \\ &= \left\{ x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty), \text{ ώστε } x(1-x) > 0 \right\} = \left\{ x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty), \text{ ώστε } x \in (0, 1) \right\} = (0, 1). \end{aligned}$$

Ο τύπος της συνάρτησης $f \circ g$ είναι:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln \left(\frac{x}{1-x} \right), \quad x \in (0, 1).$$

B2.

α) Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται αρκεί να δείξουμε ότι είναι 1-1. Ισοδύναμα:

Αν $h(x_1) = h(x_2)$ με $x_1, x_2 \in (0, 1)$ να δείξουμε ότι $x_1 = x_2$.

Πράγματι:

$$\text{Αν } h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right) = \ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right)$$

Όμως η $f(x) = \ln x$ είναι 1-1, άρα προκύπτει

$$\frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2}, \text{ άρα } x_1(1-x_2) = x_2(1-x_1), \text{ ή}$$

$$x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_1x_2, \text{ ή } x_1 = x_2.$$

β) Έστω $y = h(x) \Leftrightarrow x = h^{-1}(y), x \in (0, 1)$. Διαδοχικά έχουμε:

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = (1-x)e^y \Leftrightarrow x = e^y - xe^y \Leftrightarrow x + xe^y = e^y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(1+e^y) = e^y \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{1+e^y}, y \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Όμως } x \in (0, 1) \Leftrightarrow \frac{e^y}{1+e^y} \in (0, 1) \Leftrightarrow 0 < \frac{e^y}{e^y+1} < 1 \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Έτσι } h^{-1}(y) = \frac{e^y}{1+e^y}, y \in \mathbb{R}, \text{ ή } h^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, x \in \mathbb{R}.$$

B3

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \phi'(x) &= \left(\frac{e^x}{e^x+1} \right)' = \frac{(e^x)'(e^x+1) - e^x(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} = \\ &= \frac{e^x(e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \phi''(x) &= \left(\frac{e^x}{(e^x+1)^2} \right)' = \frac{(e^x)' \cdot (e^x+1)^2 - e^x [(e^x+1)^2]'}{(e^x+1)^4} = \\ &= \frac{e^x(e^x+1)^2 - e^x [2(e^x+1)] \cdot (e^x+1)'}{(e^x+1)^4} = \\ &= \frac{e^x(e^x+1)^2 - e^x \cdot 2(e^x+1) \cdot e^x}{(e^x+1)^4} = \\ &= \frac{e^x(e^x+1) \cdot [e^x+1-2 \cdot e^x]}{(e^x+1)^4} = \frac{e^x \cdot (1-e^x)}{(e^x+1)^3} = -\frac{e^x \cdot (e^x-1)}{(e^x+1)^3}. \end{aligned}$$

Είναι $\frac{e^x}{(1+e^x)^3} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι $\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$

$\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow -(e^x - 1) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$

$\varphi''(x) < 0 \Leftrightarrow -(e^x - 1) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$.

Η φ στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $(-\infty, 0]$, στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $[0, +\infty)$, ενώ παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο $x_0 = 0$.

B4 Οι οριζόντιες ασύμπτωτες της φ , αν υπάρχουν, προκύπτουν από τα:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$, β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$

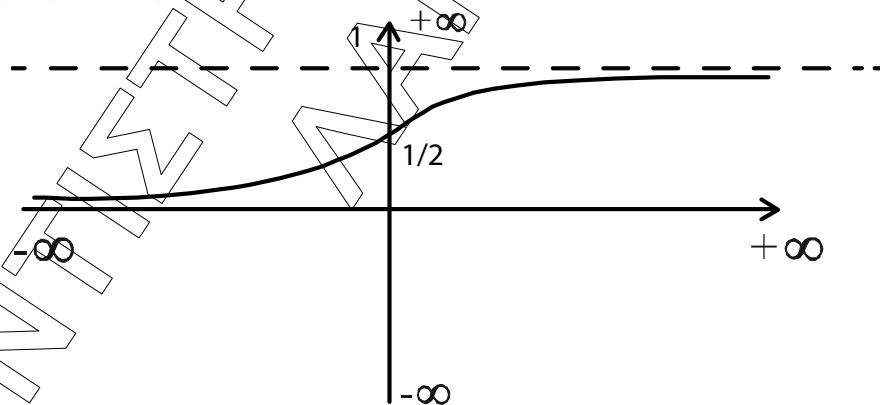
$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(e^x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

Άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια της φ στο $+\infty$.

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1)} = \frac{0}{0+1} = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ (άξονα x) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της φ στο $-\infty$.

Γραφική παράσταση:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f'(x) = -\sin x$, $x \in [0, \pi]$

Έστω $M(x_0, y_0)$ σημείο επαφής με $x_0 \in [0, \pi]$, τότε η εφαπτομένη στο M είναι:

$$(\varepsilon): y - f'(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$A \in (\varepsilon): y_A - f(x_0) = f'(x_0)(x_A - x_0)$$

$$-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sin x_0 \left(\frac{\pi}{2} - x_0 \right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\frac{\pi}{2} \sin x_0 + x_0 \sin x_0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 + \frac{\pi}{2} \sin x_0 - x_0 \sin x_0 = 0 \quad (1).$$

Θα έχουμε τόσες εφαπτόμενες ευθείες, όσες λύσεις αντίστοιχα της (1) ως προς x_0 .

Θεωρούμε τη συνάρτηση K , με

$$K(x) = -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x + \frac{\pi}{2} \sin x - x \sin x, \quad x \in [0, \pi]$$

$$K'(x) = \sin x - \frac{\pi}{2} \eta\mu x - (\sin x - x \eta\mu x)$$

$$= x \eta\mu x - \frac{\pi}{2} \eta\mu x = \eta\mu x \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$K'(x) = \eta\mu x \left(x - \frac{\pi}{2} \right), \quad x \in [0, \pi]$$

Επειδή $\eta\mu x > 0$ για $x \in (0, \pi)$, ενώ $x - \frac{\pi}{2} < 0$ για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$x - \frac{\pi}{2} > 0$ για $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,

προκύπτει ο εξής πίνακας μεταβολών για την K :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$K'(x)$		$\circ$	
		-	+
$K(x)$	0	min	0

$$\mu\epsilon \quad K\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0.$$

Προκύπτει ότι η $K(x)$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\left[1 - \frac{\pi}{2}, 0\right]$, ενώ μηδενίζεται

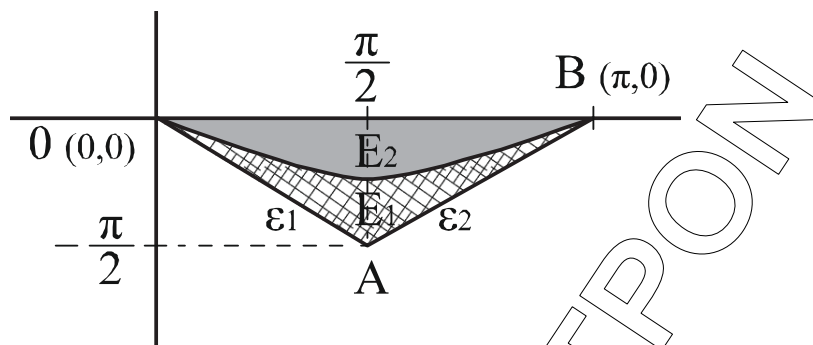
μόνο στα σημεία $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$.

Δηλαδή υπάρχουν δύο ακριβώς εφαπτόμενες που άγονται από το A :

$$\text{Για } x_1 = 0: y + \eta\mu 0 = -\sin 0(x - 0) \Leftrightarrow y = -x \quad (\varepsilon_1)$$

$$\text{Για } x_2 = \pi: y + \eta\mu \pi = -\sin \pi(x - \pi) \Leftrightarrow y = x - \pi \quad (\varepsilon_2)$$

Γ2



Επειδή $f(x) \leq 0$ για $x \in [0, \pi]$ είναι

$$\begin{aligned} E_2 &= -\int_0^\pi f(x)dx = -\int_0^\pi -\eta\mu x dx = \int_0^\pi \eta\mu x dx = \\ &= [-\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi = -[\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi = -(\sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu 0) = \\ &= -(-1 - 1) = 2 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ ισούται με $\frac{1}{2} \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$

$$E_1 = (\text{ΟΑΒ}) - E_2 = \frac{\pi^2}{4} - 2 \text{ τ.μ.}$$

$$\text{Άρα } \frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 4.$$

Γ3. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (f(x) + x) = -\eta\mu\pi + \pi = \pi > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (f(x) - x + \pi) = 0$$

$$\begin{aligned} f \text{ κυρτή στο διάστημα } [0, \pi] &\Rightarrow f(x) > x - \pi, \text{ για } x \in (0, \pi) \\ &\Rightarrow f(x) - x + \pi > 0 \text{ για } x \in (0, \pi) \end{aligned}$$

Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} = +\infty$$

Γ4. Από το σχήμα του ερωτήματος Γ2 προκύπτει ότι αφού η f είναι κυρτή στο $[1, e] \subset [0, \pi]$, θα είναι "πάνω" από κάθε εφαπτομένη της. Άρα, $f(x) > x - \pi$ για κάθε

$$x \in [1, e] \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x}, \quad x \in [1, e]$$

$$\text{Άρα } \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x}\right) dx \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi [\ln x]_1^e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi (\ln e - \ln 1) \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) Στο διάστημα $[-1, 0)$ η f είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών.

β) Στο διάστημα $(0, \pi]$ η f είναι επίσης συνεχής ως γινόμενο συνεχών.

γ) Εξετάζουμε τη συνέχεια στο $x = 0$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x \eta \mu x) = 0 = f(0).$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x = 0$, επομένως συνεχής και στο $[-1, \pi]$.

Κρίσιμα σημεία της f (εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού όπου η f' δεν υπάρχει, είτε μηδενίζεται).

$$\text{Για } -1 \leq x < 0: f(x) = \sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{(-x)^4} = (-x)^{\frac{4}{3}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}} < 0$$

$$\text{Για } 0 < x \leq \pi: f(x) = e^x \eta \mu x \Rightarrow f'(x) = e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x)$$

Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{|x|^4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| \sqrt[3]{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x \sqrt[3]{-x}}{x} = 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x \eta \mu x}{x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, άρα το σημείο $x = 0$ είναι κρίσιμο σημείο.

$$\text{Είναι } f'(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}, & -1 < x < 0 \\ e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x), & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Είναι προφανώς $f'(x) < 0$ στο $(-1, 0)$.

$$\text{Για } 0 < x < \pi \text{ είναι } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x = 0 \stackrel{\sigma \upsilon \nu x \neq 0}{\Leftrightarrow} \epsilon \phi x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} \text{ αφού}$$

$x \in (0, \pi)$. (Σημ. είναι $\sigma \upsilon \nu x \neq 0$, διότι αν $\sigma \upsilon \nu x = 0$ θα πρόκυπτε και $\eta \mu x = 0$, αδύνατον, λόγω της βασικής τριγωνομετρικής ταυτότητας $\eta \mu^2 x + \sigma \upsilon \nu^2 x = 1$).

Άρα κρίσιμα σημεία τα $x = 0$, $x = \frac{3\pi}{4}$.

Δ2 Η συνάρτηση $\varphi(x) = \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x$ αφού είναι συνεχής και μηδενίζεται μόνο στο $x = \frac{3\pi}{4}$ άρα σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

$$\text{Έτσι, για } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 \Rightarrow \varphi(x) > 0 \text{ στο } \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$$

και για $x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \varphi\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0 \Rightarrow \varphi(x) < 0$ στο $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$.

Άρα, το πρόσημο της f' και οι μεταβολές της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	-1	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
f'	-	-	+	-
f	T.M.	T.E.	T.M.	T.E.

Έτσι, η f είναι γν. αύξουσα στο $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ και γν. φθίνουσα στο $(-1, 0], \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στα σημεία $x = -1$ και $x = \frac{3\pi}{4}$ και τοπικό ελάχιστο στα $x = 0$ και $x = \pi$.

Είναι $f(-1) = 1, f(0) = 0, f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}, f(\pi) = 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-1, \pi]$, το σύνολο τιμών της θα είναι το $[f_{\min}, f_{\max}]$, όπου

$f_{\min} = \text{ολικό ελάχιστο} = \min(f(0), f(\pi)) = 0$

$f_{\max} = \text{ολικό μέγιστο} = \max\left(f(-1), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \max\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right)$.

Όμως $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} > 1 \Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{4}} > \sqrt{2} \Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{2}} > 2$. Επειδή $\frac{3\pi}{2} > 1 \Rightarrow e^{\frac{3\pi}{2}} > e^1 > 2$.

Άρα $f_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$, οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$.

Δ3. Στο $[0, \pi]$ είναι $g(x) - f(x) = e^{5x} - e^x \eta \mu x = e^x (e^{4x} - \eta \mu x)$.

Όμως, για $x \in [0, \pi]$ είναι

$$\left. \begin{aligned} e^{4x} &\geq 1 \quad (\text{η ισότητα ισχύει μόνον για } x = 0) \\ \text{και } \eta \mu x &\leq 1 \quad \left(\text{η ισότητα ισχύει μόνον για } x = \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{4x} - \eta \mu x > 0 \Rightarrow g(x) - f(x) > 0.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\pi (g(x) - f(x)) dx = \int_0^\pi (e^{5x} - e^x \eta \mu x) dx = \\ &= \int_0^\pi e^{5x} dx - \int_0^\pi e^x \eta \mu x dx = \\ &= \left[\frac{e^{5x}}{5} \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \eta \mu x dx = \frac{e^{5\pi} - 1}{5} - \int_0^\pi e^x \eta \mu x dx. \end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} e^x \eta \mu x \, dx = \int_0^{\pi} (e^x)' \eta \mu x \, dx = \left[e^x \eta \mu x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sigma \upsilon \nu x \, dx = \\ &= - \int_0^{\pi} (e^x)' \sigma \upsilon \nu x \, dx = - \left[e^x \sigma \upsilon \nu x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \eta \mu x \, dx = e^{\pi} + 1 - I \end{aligned}$$

$$\text{Άρα, ισχύει } 2I = e^{\pi} + 1 \Leftrightarrow I = \frac{e^{\pi} + 1}{2}$$

$$\text{Άρα, } E = \frac{e^{5\pi} - 1}{5} - \frac{e^{\pi} + 1}{2}.$$

Δ4. Α' Τρόπος

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται διαδοχικά

$$16f(x) - (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16f(x) - 16\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \quad (1)$$

- Η $x = \frac{3\pi}{4}$ προφανής ρίζα της εξίσωσης.

- Για $x \neq \frac{3\pi}{4}$, επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$ έχουμε:

$$f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 \quad (2)$$

$$\text{Όμως, } \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 < \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \text{ αφού } x \neq \frac{3\pi}{4} \quad (3)$$

$$\text{Από (2), (3)} \Rightarrow f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 < \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

Άρα η (1) είναι αδύνατη. Επομένως, μοναδική ρίζα είναι η $x = \frac{3\pi}{4}$.

Β' Τρόπος

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται διαδοχικά

$$16f(x) - (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$16f(x) - 16\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = 8\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

Όμως, το $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = f_{\max}$ στο διάστημα $[0, \pi]$

$$\text{Άρα, } f_{\max} = f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2$$

Και επειδή $f_{\max} \geq f(x)$ για $x \in [0, \pi]$ είναι

$$f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 \geq f(x), \quad x \in [0, \pi]$$

$$\text{Άρα, } \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x - \frac{3\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}.$$