

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
2018
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

A2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι “1-1” είναι και γνησίως μονότονη.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθές, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδές. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α.** (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

β) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

γ) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 0$.

δ) Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

ε) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 8

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

- B4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δε σβήνει.)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

- Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x , είναι

$$E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, x \in (0, 8).$$

Μονάδες 5

- Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

- Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-a} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με $a > 1$.

- Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $a > 1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 3

- Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .

Μονάδες 7

- Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (a, x_2) .

Μονάδες 6

- Δ4. Αν $a = 2$ να αποδείξετε ότι :

$$\int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} \, dx > -\frac{32}{15}.$$

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία, σελ. 99 σχολικού βιβλίου.

A2. α. Λάθος.

β. Διότι για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ είναι 1-1, αλλά όχι γνησίως μονότονη.

A3. Θεωρία, σελ. 216 σχολικού βιβλίου.

A4. α. Λάθος, β. Λάθος, γ. Σωστό, δ. Σωστό, ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x - \frac{4}{x^2} \right)' = (x)' - 4 \left(\frac{1}{x^2} \right)' = 1 - 4 \left(\frac{-2x}{x^4} \right) = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 2^3}{x^3} = \frac{(x+2) \cdot (x^2 - 2x + 4)}{x^3} \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } x^2 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 1) + 3 = (x-1)^2 + 3 > 0$$

$$\text{Άρα } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x^3} > 0 \Leftrightarrow (x+2) \cdot x^3 > 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x^3} < 0 \Leftrightarrow (x+2) \cdot x^3 < 0$$

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x+2	-	○	+	+
x^3	-		○	+
f'	+	○	-	+
f	↗	τ.μ.	↘	↗

Επομένως η f :

- Είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 0)$.
- Έχει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_0 = -2$, την τιμή $f(-2) = -2 - \frac{4}{4} = -3$.

B2. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ είναι:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = \left(1 + \frac{8}{x^3}\right)' = 8\left(\frac{1}{x^3}\right)' = 8 \frac{-3x^2}{x^6} = \\ &= -\frac{24}{x^4} < 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{0\}. \end{aligned}$$

Άρα η f στρέφει τα κοίλα κάτω σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, ενώ δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

B3

α) Κατακόρυφες ασύμπτωτες:

$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-4}{x^2}\right) = -\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$. Άρα η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$ (κατακόρυφος άξονας), στο $-\infty$.

β) Οριζόντιες ασύμπτωτες

β1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

β2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

γ) Πλάγιες ασύμπτωτες:

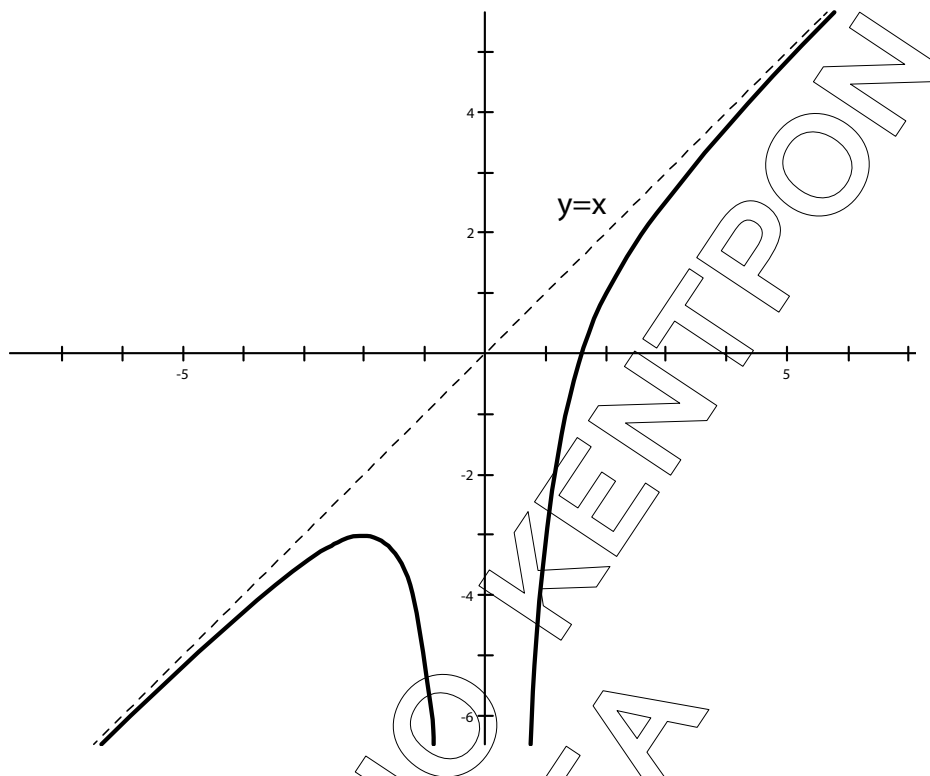
Είναι $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{4}{x^3} = \frac{x^3 - 4}{x^3}$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. ($= \alpha$)

Επίσης $f(x) - x = \frac{-4}{x^3}$, άρα

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$ ($= \beta$)

Άρα η f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x$ και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.



$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}.$$

Επομένως η γραφική παράσταση της f τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο $A(\sqrt[3]{4}, 0)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το πρώτο τμήμα αφού είναι μήκους x και κατασκευάζουμε τετράγωνο. Η πλευρά του τετραγώνου θα είναι $\frac{x}{4}$, επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου θα είναι

$$E_1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}.$$

Το δεύτερο τμήμα θα είναι μήκους $8 - x$. Αν ρ η ακτίνα του κύκλου που κατασκευάζεται με το τμήμα αυτό, τότε θα είναι $2\pi\rho = 8 - x \Leftrightarrow \rho = \frac{8 - x}{2\pi}$.

Άρα το εμβαδόν του κύκλου θα είναι

$$E_2 = \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{8 - x}{2\pi}\right)^2 = \pi\frac{(8 - x)^2}{4\pi^2} = \frac{(8 - x)^2}{4\pi} = \frac{64 + x^2 - 16x}{4\pi}.$$

Επομένως το άθροισμα των εμβαδών θα είναι

$$\begin{aligned} E(x) &= E_1 + E_2 = \frac{x^2}{16} + \frac{64 + x^2 - 16x}{4\pi} = \\ &= \frac{\pi x^2 + 256 + 4x^2 - 64x}{16\pi} = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} \end{aligned}$$

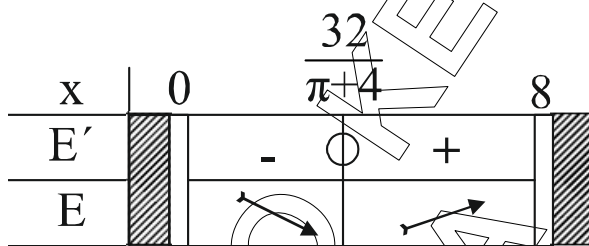
$$\text{Είναι } x > 0 \text{ και } 8 - x > 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x > 0 \\ x < 8 \end{matrix} \Leftrightarrow 0 < x < 8.$$

Γ2. Είναι $E'(x) = \frac{1}{16\pi} [2(\pi+4)x - 64]$, $0 < x < 8$.

$$\text{Είναι } E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(\pi+4)x - 64 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{32}{\pi+4}.$$

Άρα από τον πίνακα μεταβολών η E παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = \frac{32}{\pi+4}$

$$\text{με τιμή } E = \left(\frac{32}{\pi+4} \right) = \frac{(\pi+4) \frac{32^2}{(\pi+4)^2} - 64 \cdot \frac{32}{\pi+4} + 256}{16\pi} = \frac{16}{\pi+4}$$



Τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι $\frac{x}{4} = \frac{\frac{32}{\pi+4}}{4} = \frac{8}{\pi+4}$
και η διάμετρος του κύκλου είναι

$$2\rho = 2 \cdot \frac{8-x}{2\pi} = \frac{8-x}{\pi} = \frac{8 - \frac{8}{\pi+4}}{\pi} = \frac{8\pi}{\pi(\pi+4)} = \frac{8}{\pi+4}.$$

Άρα το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Αρκεί ν. δ. ο. η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει μοναδική λύση στο $(0, 8)$.

Για το διάστημα $A_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4} \right]$:

$$A_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4} \right] \xrightarrow[E \text{ γνησίως φθίνουσα}]{E \text{ συνεχής}} E(A_1) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4} \right), \lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) \right] = \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi} \right)$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) = \frac{16}{\pi} \cdot \frac{16}{\pi+4} \approx 2,24 \text{ και } \frac{16}{\pi} \approx 5,09.$$

Άρα $5 \in E(A_1)$ και άρα από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει $x_0 \in A_1 : E(x_0) = 5$
και επειδή η E είναι $\downarrow$ στο A_1 , άρα το x_0 είναι μοναδικό, στο διάστημα A_1 .

Επίσης για το διάστημα $A_2 = \left[\frac{32}{\pi+4}, 8 \right)$:

$$A_2 = \left[\frac{32}{\pi+4}, 8 \right) \xrightarrow[E \text{ γνησίως αύξουσα}]{E \text{ συνεχής}} E(A_2) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 8^-} E(x) \right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4 \right) \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} E(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{(\pi+4)8^2 - 64 \cdot 8 + 256}{16\pi} = 4$$

$5 \notin E(A_2)$ άρα η εξίσωση $E(x) = 5$ είναι αδύνατη στο A_2 .

Επομένως υπάρχει μοναδική τιμή $x_0 \in \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right) : E(x_0) = 5$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = 2x^{x-a} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με $a > 1$.

Είναι $f'(x) = 2 \cdot e^{x-a} - 2x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f''(x) = (2 \cdot e^{x-a} - 2x)^{\prime} = 2 \cdot e^{x-a} - 2 = 2(e^{x-a} - 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} = 1 \Leftrightarrow e^{x-a} = e^0 \Leftrightarrow x - a = 0 \Leftrightarrow x = a$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} > 1 \Leftrightarrow e^{x-a} > e^0 \Leftrightarrow x - a > 0 \Leftrightarrow x > a$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{x-a} < 1 \Leftrightarrow e^{x-a} < e^0 \Leftrightarrow x - a < 0 \Leftrightarrow x < a$$

Συγκεντρωτικό:

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
f		Σ.Κ.	

Άρα η f παρουσιάζει σημείο καμπής στη θέση $x_0 = a$.

Δ2 α) $f'(x) = 2(e^{x-a} - x)$, $x \in \mathbb{R}$

βρίσκουμε το όριο της f' στο $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-a} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^a} \cdot e^x \right) = \frac{1}{e^a} \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty. \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = +\infty$$

β) $f'(a) = 2(e^{a-a} - a) = 2(1 - a) < 0.$

γ) Βρίσκουμε το όριο της f' όταν $x \rightarrow +\infty$

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{2}{e^a} \cdot e^x - 2x = x \cdot \left(\frac{2}{e^a} \cdot \frac{e^x}{x} - 2 \right).$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e^a} \cdot \frac{e^x}{x} - 2 \right) = +\infty$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$

Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, a]$ (λόγω του B1)

$$\text{Άρα } f'((-\infty, a]) = \left[f'(a), \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) \right] = [2 \cdot (1-a), +\infty).$$

Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[a, +\infty)$ (λόγω του Δ1)

$$\text{Άρα } f'([a, +\infty)) = \left[f'(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \right) = [2 \cdot (1-a), +\infty), \text{ με } 2(1-a) < 0.$$

Άρα υπάρχει τιμή x_1 στο διάστημα $(-\infty, a]$ ώστε $f'(x_1) = 0$ και τιμή x_2 στο διάστημα $[a, +\infty)$, ώστε $f'(x_2) = 0$.

Όμως στο $(-\infty, a]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα

$$\text{άρα } x < x_1 \Rightarrow f'(x) > f'(x_1) \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$\text{για } x > x_1 \Rightarrow f'(x) < f'(x_1) \Rightarrow f'(x) < 0$$

Επίσης στο $[a, +\infty)$ η f' είναι γνησίως αύξουσα

$$\text{άρα } x < x_2 \Rightarrow f'(x) < f'(x_2) \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$\text{για } x > x_2 \Rightarrow f'(x) > f'(x_2) \Rightarrow f'(x) > 0$$

Δηλαδή προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών της f'

X	$-\infty$	x_1	a	x_2	$+\infty$
f'	$+\infty$	$+$ $\bigcirc$	$-$	$\bigcirc$ $+$	$+\infty$
f	$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$

Προκύπτει ότι υπάρχουν μοναδικά x_1, x_2 τέτοια ώστε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .

Δ3. Αφού $a > 1$ και f' γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, a]$ ισχύει:

$$a > 1 \Rightarrow f'(a) < f'(1) \Rightarrow 2 - 2a < 2 \cdot e^{1-a} - 2 \Rightarrow e^{1-a} > 2 - a \quad (1).$$

Στο διάστημα (a, x_2) η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα το

$$f((a, x_2)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right) = \left(\lim_{x \rightarrow x_2} f(x), 2 - a^2 \right), \text{ δηλαδή}$$

$$f(x) < 2 - a^2 = f(a) \quad (2)$$

Είναι $f(1) = 2 \cdot e^{1-a} - 1$

Όμως λόγω της (1)

$$e^{1-a} > 2-a \Rightarrow 2e^{1-a} > 2(2-a) \Rightarrow 2 \cdot e^{1-a} - 1 > 4-2a-1 \Rightarrow f(1) > 3-2a.$$

Όμως $3-2a > 2-a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 > 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 > 0$, που ισχύει.

Άρα $f(1) > f(a)$ (3)

Από (2) και (3) έπεται:

$f(x) < f(a) < f(1)$, άρα η $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη.

(β' τρόπος)

Επειδή $a > 1$ είναι $1-a < 0$ και $e^{1-a} < e^0 \Leftrightarrow e^{1-a} < 1 \Leftrightarrow e^{1-a} - 1 < 0$.

Όμως $f'(1) = 2(e^{1-a} - 1)$, άρα $f'(1) < 0$.

Αν $1 \leq x_1$ επειδή η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, a]$ άρα και στο

$(-\infty, x_1] \subseteq (-\infty, a]$ είναι $f'(1) \geq f'(x_1) \Leftrightarrow f'(1) \geq 0$ άτοπο

Άρα $1 > x_1$ ή $a > 1 > x_1$.

Στο διάστημα $[a, x_2] \subseteq [x_1, x_2]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα επειδή

$a > 1 \Rightarrow f(a) < f(1)$ (1)

Επίσης είναι $f((a, x_2)) = (f(x_2), f(a))$.

Άρα για κάθε $x \in (a, x_2)$ είναι $f(x) < f(a) < f(1)$ (λόγω της 1).

Άρα η $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη.

(γ' τρόπος)

$f(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $[a, x_2]$ άρα

$$f[a, x_2] = [f(x_2), f(a)]$$

Όμως $f(1) = 2 \cdot e^{1-a} - 1$ και $f(a) = 2 - a^2$.

Θα δείξουμε ότι: $f(1) > f(a) \Leftrightarrow 2 \cdot e^{1-a} - 1 > 2 - a^2 \Leftrightarrow 2 \cdot e^{1-a} + a^2 - 3 > 0$,
με $a > 1$.

Έστω $K(x) = 2 \cdot e^{1-x} + x^2 - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $K(x) > 0$ για κάθε $x > 1$.

Η $K(x)$ παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων με:

$$K'(x) = -2 \cdot e^{1-x} + 2 \cdot x$$

Η $K'(x)$ παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων με:

$$K''(x) = 2 \cdot e^{1-x} + 2 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα $K'(x)$ γνησίως αύξουσα και ισχύει $K'(1) = 0$.

$K'(x)$ γνησίως αύξουσα
Για $x < 1 \Rightarrow K'(x) < K'(1) = 0$ άρα $K(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα

$K'(x)$ γνησίως αύξουσα
Για $x > 1 \Rightarrow K'(x) > K'(1) = 0$ άρα $K(x)$ είναι γνησίως αύξουσα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$K'(x)$	-	○	+
$K(x)$			

τοπ.
ελάχιστο

Η $K(x)$ έχει ελάχιστο το $K(1)=0$, και $K(x) > K(1)=0$ για κάθε $x > 1$.

Δ4 Για $a=2$, είναι $f(x)=2 \cdot e^{x-2} - x^2$.

Η εφαπτομένη της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=2$ είναι η ευθεία:

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y - (-2) = -2(x - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y + 2 = -2x + 4 \Leftrightarrow y = -2x + 2 \Leftrightarrow y = -2(x - 1)$$

Επειδή η f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $[a, +\infty) = [2, +\infty)$, προκύπτει ότι για $x \in [2, 3]$:

$$f(x) \geq -2(x - 1) \Leftrightarrow f(x) \cdot \sqrt{x - 2} \geq -2(x - 1)\sqrt{x - 2} \Leftrightarrow$$

$$f(x) \cdot \sqrt{x - 2} - (-2(x - 1)\sqrt{x - 2}) \geq 0,$$

με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=2$.

Άρα

$$\int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x - 2} - (-2(x - 1)\sqrt{x - 2}) dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_2^3 f(x) \sqrt{x - 2} dx > \int_2^3 [-2(x - 1)\sqrt{x - 2}] dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 f(x) \sqrt{x - 2} dx > -2 \int_2^3 (x - 2 + 1) \sqrt{x - 2} dx. \quad (1)$$

Για το ολοκλήρωμα του 2^{ου} μέλους θέτουμε $u = x - 2$, οπότε αυτό γράφεται:

$$\int_2^3 (x - 2 + 1) \sqrt{x - 2} dx = \int_0^1 (u + 1) \sqrt{u} du.$$

Έτσι η (1) γράφεται

$$\int_2^3 f(x) \sqrt{x - 2} dx > -2 \int_0^1 (u + 1) \sqrt{u} du$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 f(x) \sqrt{x - 2} dx > -2 \int_0^1 (u^{3/2} + u^{1/2}) du,$$

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2} \, dx > -2 \left[\frac{2}{5} u^{5/2} \right]_0^1 - 2 \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2} \, dx > -2 \left(\frac{2}{5} \right) - 2 \left(\frac{2}{3} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2} \, dx > -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2} \, dx > -\frac{32}{15}$$