

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
2020**

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$.
Αν

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε συνάρτηση f , ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) > 0$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθές**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδές**.

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**).

(μονάδες 3)

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^{2\nu+1}} \right) = +\infty$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B , αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται, αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

- δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.
- ε) Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ και}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = e^x.$$

- B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$

Μονάδες 5

- B2.** Αν $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$, με $x > 0$, αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι '1-1' και βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

- B3.** Αν $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, με $x > 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

- B4.** Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **B3**, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \quad \text{με } \lambda > 0$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, 1)$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Γ4. Ένα σημείο $M(a, f(a))$, με $a \leq 0$, κινείται στη γραφική παράσταση της f . Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο

$$\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη -1 .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$$

Μονάδες 7

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right],$$

όπου x_0 το σημείο του ερωτήματος Δ1 που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Μονάδες 6

Δ3. Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος Δ1 που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x = x_0$ για $x \in (x_0, 1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ .

Μονάδες 5

Δ4. Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος Δ1 που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος Δ3, να αποδείξετε ότι $f(x_0) > f(\rho)(f'(k) + 1)$ για κάθε $k \in (\rho, 1)$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, απόδειξη παρ. 1.8 σχολικό βιβλίο.
- A2.** Ορισμός, παράγρ. 2.2 σχολικό βιβλίο.
- A3.** (Λ) Αντιπαράδειγμα: Η συνάρτηση $f(x) = x^3$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αλλά $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ στο $\mathbb{R}$.
- A4.** $\alpha) \rightarrow \Lambda, \beta) \rightarrow \Sigma, \gamma) \rightarrow \Sigma, \delta) \rightarrow \Sigma, \epsilon) \rightarrow \Sigma$.

ΘΕΜΑ Β

B1. $A_f = (1, +\infty), A_g = \mathbb{R}$

Η $f \circ g$ ορίζεται στο σύνολο

$$A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ ώστε } g(x) \in A_f\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ ώστε } e^x > 1\} = (0, +\infty).$$

Ο τύπος της είναι: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}, x > 0.$

B2. Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty): (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \Rightarrow \frac{e^{x_1} + 2}{e^{x_1} - 1} = \frac{e^{x_2} + 2}{e^{x_2} - 1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow (e^{x_1} + 2)(e^{x_2} - 1) = (e^{x_2} + 2)(e^{x_1} - 1) \Rightarrow e^{x_1 x_2} - e^{x_1} + 2e^{x_2} - 2 = e^{x_1 x_2} - e^{x_2} + 2e^{x_1} - 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3e^{x_1} = 3e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2.$

Οπότε η $f \circ g$ είναι 1-1 άρα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση:

$$(f \circ g)^{-1}: (f \circ g)((0, +\infty)) \rightarrow \mathbb{R}$$

Είναι $y = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \Leftrightarrow ye^x - y = e^x + 2 \Leftrightarrow (y-1)e^x = y+2 \quad (1)$

Αν $y = 1$ η (1) $\Leftrightarrow 0e^x = 3$ αδύνατη, άρα $1 \notin (f \circ g)((0, +\infty))$

Αν $y \neq 1$ η (1) $\Leftrightarrow e^x = \frac{y+2}{y-1}.$

Πρέπει $\frac{y+2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y < -2 \text{ ή } y > 1 \quad (2)$

και

$$x = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) \text{ αλλά } x > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) > \ln 1 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{y+2-y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y > 1 \quad (3)$$

Από (2), (3) τελικά $y > 1$

$$\text{Έτσι: } \varphi(x) = (f \circ g)^{-1} = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right), \quad x > 1$$

(Δεύτερος τρόπος): Μελετάμε τη μονοτονία της συνάρτησης $f \circ g$ με τη βοήθεια της παραγώγου (προκύπτει γνησίως φθίνουσα) και βρίσκουμε ως σύνολο τιμών της το διάστημα $((\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x), \lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x)) = (1, +\infty)$.

$$\mathbf{B3.} \quad \text{Για } x > 1: \varphi'(x) = \frac{x-1}{x+2} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)' = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{-1-x-2}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x+2)(x-1)^2} < 0$$

Άρα φ γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

$$\mathbf{B4.} \quad \lim_{x \rightarrow +1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \stackrel{\frac{x+2}{x-1} = u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \stackrel{\frac{x+2}{x-1} = u}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = \ln 1 = 0.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών.

Η f συνεχής στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ ομοίως ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών.

Αφού είναι συνεχής η f πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Άρα πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1-x} - \ln \lambda \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x) = 1 - \ln \lambda \Leftrightarrow$$

$$1 - \ln \lambda = \lambda \Leftrightarrow \ln \lambda = 1 - \lambda \Leftrightarrow \ln \lambda + \lambda - 1 = 0. \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x + x - 1$, $x > 0$ με

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0 \Rightarrow \varphi \text{ γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty). \text{ Από (1) είναι}$$

$$\varphi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\lambda) = \varphi(1) \stackrel{\varphi \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} \lambda = 1.$$

Γ2 Είναι $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

Για $x < 0$: $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \frac{1 - 1 + x}{x(1-x)} = \frac{1}{1-x}$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$

Για $x > 0$: $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \right) = 1 + 0 = 1$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$

Άρα η εφαπτόμενη στο $A(0,1)$ έχει εξίσωση:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow y = x + 1$$

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη με τον άξονα xx' είναι:

$$\varepsilon\varphi\omega = f'(0) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4} \quad (\omega \in [0, \pi)) \dots$$

Γ3. Για $x < 0$: $f'(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Για $x > 0$: $f'(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$

Άρα $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x, & x > 0 \end{cases}$

Για $x \leq 0$ είναι $f'(x) > 0$.

Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$

$\overset{\sigma\upsilon\nu x \neq 0}{\Leftrightarrow} \varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{4} \text{ αφού } x \in \left(0, \frac{3\pi}{2} \right)$

Επειδή λοιπόν η f' ορίζεται στο $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2} \right)$ και $f'(x) = 0$ στα $x = \frac{\pi}{4}$ και

$x = \frac{5\pi}{4}$, αυτά είναι και τα κρίσιμα σημεία.

Γ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(\alpha, f(\alpha))$ είναι $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$.

$$\text{Για } y = 0 \Rightarrow -f(\alpha) = f'(\alpha)x - \alpha f'(\alpha) \Leftrightarrow x = \frac{\alpha f'(\alpha) - f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

Άρα το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα $x'x$ είναι

$$B\left(\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, 0\right)$$

$$\text{Επομένως } x_B = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha - \frac{\frac{1}{1-\alpha}}{\frac{1}{(1-\alpha)^2}} = \alpha - (1-\alpha) = 2\alpha - 1.$$

Άρα την οποιαδήποτε χρονική στιγμή t είναι:

$$x_B(t) = 2a(t) - 1 \Rightarrow x'_B(t) = 2a'(t) \Rightarrow x'_B(t) = 2\left(-\frac{a(t)}{3}\right) \Rightarrow x'_B(t) = -\frac{2}{3}a(t) \quad (1)$$

Όμως ισχύει $a(t_0) = -1$

Από (1) για $t = t_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x'_B(t_0) = -\frac{2}{3}a(t_0) \Rightarrow x'_B(t_0) = -\frac{2}{3}(-1) \Rightarrow x'_B(t_0) = \frac{2}{3} \frac{\text{μονάδα μήκους}}{\text{μονάδα χρόνου}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι:

$$f'(x) = e^x + 2x - e \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = e^x + 2 \quad x \in \mathbb{R}$$

$f''(x) > 0$ στο $\mathbb{R}$ άρα f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Η f' στο $[0, 1]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano αφού

$$f'(0) = 1 - e < 0$$

$$f'(1) = 2 > 0$$

Άρα υπάρχει $x_0 \in (0, 1): f'(x_0) = 0$

Το παραπάνω είναι μοναδικό στο $\mathbb{R}$ αφού f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έτσι

$$x < x_0 \stackrel{f' \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$$

$$x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$$

x	$-\infty$	0	x_0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-		+	
$f(x)$					

$\min: f(x_0)$

Έχουμε:

$$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 - 1 \quad (1)$$

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0 \quad (2)$$

$$\text{Η (1)} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$$

Δ2. Από (Δ1) για $x \neq x_0$ είναι $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ λόγω συνέχειας της f στο x_0 .

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty \quad (3)$$

Ακόμη για $x \neq x_0$ είναι:

$$\eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \geq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \quad (4)$$

$$\text{Από (3)} \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \right) = +\infty$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \right] = +\infty$$

Δ3 Έστω $\varphi(x) = f(x) + x - x_0$, $x \in [x_0, 1]$

Η φ είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών.

- $\varphi(x_0) = f(x_0)$

Όμως $x_0 < 1 \stackrel{(\Delta_1)}{\Rightarrow} f(x_0) < f(1) = 0 \Rightarrow \varphi(x_0) < 0$

- $\varphi(1) = f(1) + 1 - x_0 > 0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho \in (x_0, 1)$

Ωστε: $\varphi(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) + \rho - x_0 = 0$

Η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική στο $[x_0, 1]$

Αφού $\varphi'(x) = f'(x) + 1 > 0$ στο $[x_0, 1]$

$\Rightarrow \varphi$ γνησίως αύξουσα στο $[x_0, 1]$.

Δ4. Είναι $f(\rho) + \rho = x_0$ με $\rho \in (x_0, 1)$ και $x_0 \in (0, 1)$

Έχουμε για $\kappa \in (\rho, 1)$:

$$f(x_0) > f(\rho)(f'(\kappa) + 1) \Leftrightarrow f(x_0) - f(\rho) > f(\rho)f'(\kappa)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa) \quad (5)$$

Η f στο $[x_0, \rho]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει

$$\xi \in (x_0, \rho): f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} \quad (6)$$

$$\stackrel{(6)}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(\kappa)$$

Ισχύει αφού f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $\xi < \rho, \kappa \in (\rho, 1)$.

Δ4. (2ος τρόπος)

$$f(x_0) > f(\rho)(f'(\kappa) + 1) \Leftrightarrow f(x_0) > f(\rho)f'(\kappa) + f(\rho) \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) - f(\rho)f'(\kappa) - f(\rho) > 0$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$\varphi(x) = f(x_0) - f(\rho)f'(x) - f(\rho) \quad \text{με } x \in [\rho, 1]$$

είναι $\varphi(x) > 0$.

Στο $[x_0, \rho]$ από ΘΜΤ υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi \in (x_0, \rho): f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} \Leftrightarrow f(x_0) - f(\rho) = f'(\xi)(x_0 - \rho).$$

Από το Δ3. είναι

$$f(\rho) + \rho = x_0 \Leftrightarrow f(\rho) = x_0 - \rho < 0.$$

$$\text{Άρα } \varphi(x) = f'(\xi)(x_0 - \rho) - (x_0 - \rho)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) = (x_0 - \rho)(f'(\xi) - f'(x))$$

Είναι

$$\varphi'(x) = (x_0 - \rho)(-f''(x)) > 0, \quad \text{αφού } x_0 - \rho < 0$$

και $f''(x) > 0 \Rightarrow \varphi$ γνησίως αύξουσα στο $[\rho, 1]$.

$$\text{Άρα } \rho < x < 1 \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(\rho) = (x_0 - \rho)(f'(\xi) - f'(\rho)) \quad (1)$$

$$\text{Αφού } \xi < \rho \stackrel{f'' > 0}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(\rho) \Rightarrow f'(\xi) - f'(\rho) < 0$$

$$\stackrel{(1)}{\text{και } x_0 - \rho < 0 \Rightarrow} \varphi(x) > \varphi(\rho) > 0 \Rightarrow \varphi(x) > 0.$$