

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
(ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
2020**

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 7

- A2.** Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η πρώτη παράγωγος της f ;

Μονάδες 4

- A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Μονάδες 4

- A4.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

- α)** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθές**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδές**.

(μονάδα 1)

- β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

(μονάδες 3)

Μονάδες 4

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι **σωστή**, ή **ΛΑΘΟΣ** αν η πρόταση είναι **λανθασμένη**.

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε x κοντά στο x_0 .

β) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε $f(a) \neq f(\beta)$.

γ) Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$, $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R} - \{3\}$.

Μονάδες 5

B2. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

Μονάδες 8

B3. Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

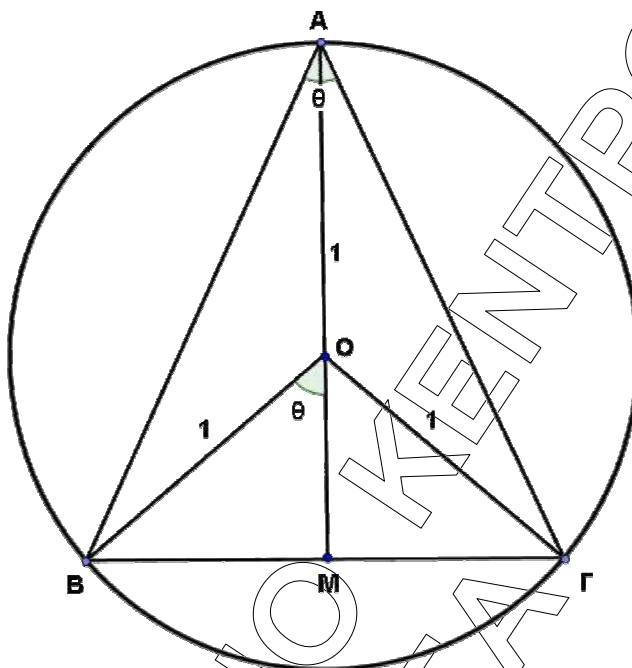
Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα 1, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και $B\hat{O}M = \theta$, τότε:

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση της γωνίας θ είναι: $E(\theta) = (1 + \cos\theta) \eta\mu\theta$, $\theta \in (0, \pi)$.

Μονάδες 5

- Γ2.** Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta \in (0, \pi)$, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

Μονάδες 8

- Γ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο γωνίες θ_1, θ_2 , με $\theta_1 < \theta_2$, για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\frac{3}{4}$.

Μονάδες 6

- Γ4.** Για τις γωνίες θ_1, θ_2 , του ερωτήματος Γ3, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$ τέτοια, ώστε:

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) E'(\xi_2).$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x \cdot \ln x - \ln(\lambda x), \quad x \in (0, +\infty), \lambda \in (0, +\infty) \text{ και} \\ g(x) = x^x, \quad x \in (0, +\infty)$$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$, το οποίο και να βρείτε. Στην συνέχεια, να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο ακρότατου της f , καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 5

- Δ2.** Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει $x^x \geq \lambda x$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

Για τα ερωτήματα Δ3 και Δ4 θεωρήστε ότι $\lambda = 1$.

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της g , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

- Δ4.** Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι:

i. Η h είναι συνεχής

(Μονάδες 3)

ii. Η εξίσωση

$$x^{2020} \left(3 - 2 \int_1^2 g(t) dt \right) + (1-x) \int_0^1 h(1-t) dt = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

(Μονάδες 6)

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1 Σελίδα 111 Σχολικού βιβλίου, Θεώρημα.

A2 Σελίδα 104 Σχολικού βιβλίου, ορισμός.

A3 Σελίδα 74 Σχολικού βιβλίου, Θεώρημα.

A4 α) Λ

β) Έστω $f(x) = x$ με $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

άρα το όριο της $\frac{1}{f}$ στο $x = 0$ δεν υπάρχει.

A5 α) Σωστό, **β)** Σωστό, **γ)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1 Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{3\}$

$$\begin{aligned} \text{Με } f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{3x_1+1}{x_1-3} = \frac{3x_2+1}{x_2-3} \Leftrightarrow 3x_1x_2 + x_2 - 9x_1 - 3 = 3x_1x_2 + x_1 - 9x_2 - 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10 \cdot x_2 = 10 \cdot x_1 \Leftrightarrow x_2 = x_1 \Rightarrow f \text{ είναι "1-1" επομένως αντιστρέφεται.} \end{aligned}$$

B2 Είναι $y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{3x+1}{x-3} \Leftrightarrow yx - 3y = 3x + 1 \Leftrightarrow (y-3)x = 3y + 1 \quad (1)$

$$\text{Αν } y-3=0 \Leftrightarrow y=3 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 0=10 \text{ άτοπο}$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} y \neq 3 \Rightarrow x = \frac{3y+1}{y-3}$$

$$\text{Πρέπει } x \neq 3 \Rightarrow \frac{3y+1}{y-3} \neq 3 \Leftrightarrow 3y+1 \neq 3y-9 \Leftrightarrow 1 \neq -9 \text{ ισχύει}$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3} \text{ με } x \neq 3$$

Οι συναρτήσεις f και f^{-1} έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

$$A = \mathbb{R} - \{3\} \text{ και για κάθε } x \in A \text{ ισχύει } f(x) = f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3}$$

B3 Για να ορίζεται η $f \circ f$ πρέπει: $\left. \begin{matrix} x \in A_f \\ f(x) \in A_f \end{matrix} \right\}$

$\left. \begin{matrix} x \neq 3 \\ f(x) \neq 3 \end{matrix} \right\} x \neq 3$ διότι $f(x) \neq 3$ από B_2 .

Έτσι για $x \neq 3 \Rightarrow (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$
διότι από (B_2) είναι $f(x) = f^{-1}(x)$.

B4 Είναι $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{3x+1}{x-3} = \frac{0}{-\frac{10}{3}} = 0$.

Επίσης $\left| f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \Rightarrow |f(x)| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \leq |f(x)|$ (1)

αφού $\left| \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \leq 1$ κοντά στο $-1/3$.

Άρα από (1) $\Rightarrow \left| f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \leq |f(x)| \Rightarrow -|f(x)| \leq f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \leq |f(x)|$ (2)

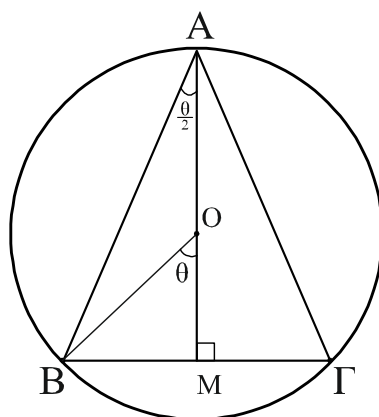
Είναι $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} f(x) \right| = 0$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} (-|f(x)|) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right) = 0$ (2)

από το κριτήριο παρεμβολής.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από το ορθογώνιο τρίγωνο OAM έχουμε $OM = \sigma\upsilon\nu\theta$, $OA = 1$
 $BM = \eta\mu\theta$



Άρα

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AM \cdot B\Gamma = \frac{1}{2} (AO + OM) \cdot 2BM = (1 + \sin \theta) \cdot \eta\mu \theta \quad \theta \in (0, \pi).$$

Γ2. Θεωρώ $E(\theta) = (1 + \sin \theta) \cdot \eta\mu \theta \quad \theta \in (0, \pi)$

$$E'(\theta) = -\eta\mu \theta \cdot \eta\mu \theta + (1 + \sin \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu \theta =$$

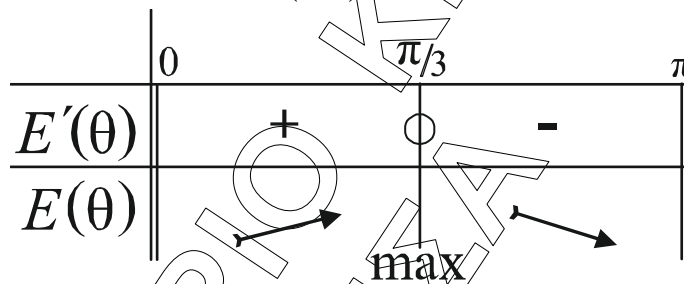
$$= -\eta\mu^2 \theta + \sigma\upsilon\nu^2 \theta + \sigma\upsilon\nu \theta =$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu^2 \theta + \sigma\upsilon\nu \theta - 1, \quad \theta \in (0, \pi)$$

$$E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 \theta + \sigma\upsilon\nu \theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \theta = -1 \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu \theta = \frac{1}{2}.$$

$$E'(\theta) > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \theta < -1, \text{ αδύνατη} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu \theta > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta < \frac{\pi}{3} \text{ με } \theta > 0$$

(διότι $\sigma\upsilon\nu \theta$ γνησίως φθίνουσα στο $(0, \pi)$).



Δηλαδή όταν $\theta = \frac{\pi}{3}$ έχω $E(\theta) \rightarrow \max$, άρα η γωνία $A = \frac{\pi}{3}$ δηλαδή το ισοσκελές γίνεται ισόπλευρο.

Γ3. Έχω ότι $\varepsilon(\theta)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

$$\text{άρα } E\left(\left(0, \frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\lim_{\theta \rightarrow 0^+} E(\theta), \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} E(\theta)\right) = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\text{Επειδή } 0 < \frac{3}{4} < \frac{3}{4}\sqrt{3} \Rightarrow \frac{3}{4} \in E\left(\left(0, \frac{\pi}{3}\right)\right) \text{ υπάρχει μοναδικό } \theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) : E(\theta_1) = \frac{3}{4}$$

Η $E(\theta)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ με

$$E\left(\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)\right) = \left(\lim_{x \rightarrow \pi^-} E(\pi), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\text{Δηλ } \frac{3}{4} \in E\left(\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)\right) \text{ άρα υπάρχει μοναδικό } \theta_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right) : E(\theta_2) = \frac{3}{4}$$

Γ4. Από Θ.Μ.Τ. στο $\left[\theta_1, \frac{\pi}{3}\right]$ έχω ότι $\exists \xi_1 \in \left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right) : E'(\xi_1) = \frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1}$

$\Leftrightarrow E'(\xi_1) \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) = E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1)$ (1) και από Θ.Μ.Τ. στο $\left[\frac{\pi}{3}, \theta_2\right]$ έχω ότι

$\exists \xi_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right) : E'(\xi_2) = \frac{E(\theta_2) - E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow E'(\xi_2) \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) = E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_2)$ (2)

(1) (2) $\xrightarrow{E(\theta_1)=E(\theta_2)=\frac{3}{4}}$ $E'(\xi_1) \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) = E'(\xi_2) \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right)$

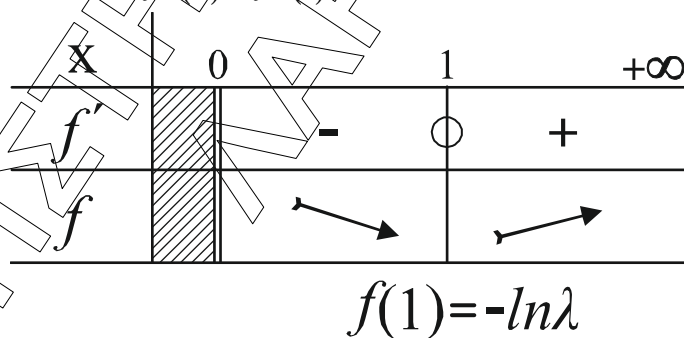
ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \ln x + 1 - \frac{\lambda}{\lambda x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x}, \quad x > 0.$

$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \rightarrow f'$ γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Είναι $f'(1) = 0$ και επομένως για $x > 1$ $\Rightarrow f'(x) > f'(1) = 0$

και για $0 < x < 1$ $\Rightarrow f'(x) < f'(1) = 0$



Από τον πίνακα με το πρόσημο της f' έχουμε ότι η f είναι στο $(0, 1]$ γνησίως φθίνουσα και στο $[1, +\infty)$ γνησίως αύξουσα και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$ το $f(1) = -\ln \lambda$.

Άρα το ακρότατο είναι το $(1, -\ln \lambda)$ με $\lambda > 0$ και η συνάρτηση $-\ln \lambda$ παίρνει τιμές στο $(-\infty, +\infty)$ και επομένως το ακρότατο θα βρίσκεται στην ευθεία $x = 1$.

Δ2. $x^x \geq \lambda x \Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln(\lambda x) \Leftrightarrow x \ln x - \ln(\lambda x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0.$

Όμως $f(x) \geq -\ln \lambda$ από Δ1., άρα πρέπει

$-\ln \lambda \geq 0 \Rightarrow \ln \lambda \leq 0 \Leftrightarrow \ln \lambda \leq \ln 1 \Rightarrow \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda_{\text{μεγ}} = 1.$

Δ3. Είναι $g(x) = x^x = e^{x \ln x}$ με

$$g'(x) = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = g(x)(\ln x + 1) \quad (1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο

$$(x_0, g(x_0)) \text{ με } x_0 > 0 \text{ είναι: } y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0).$$

Για να διέρχεται από το $O(0, 0)$ πρέπει:

$$\begin{aligned} -g(x_0) &= g'(x_0)(-x_0) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} g(x_0) = g(x_0)(\ln x_0 + 1)x_0 \stackrel{g(x_0) > 0}{\Leftrightarrow} 1 = (\ln x_0 + 1)x_0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} &= \ln x_0 + 1 \Leftrightarrow \ln x_0 - \frac{1}{x_0} + 1 = 0 \quad (2). \end{aligned}$$

Θεωρώ $\lambda(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 1$ με $x > 0$, είναι $\lambda'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow \lambda(x)$ γνησίως

αύξουσα, άρα και '1-1'. Η (2) γίνεται $\lambda(x_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda(x_0) = \lambda(1) \Leftrightarrow x_0 = 1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(1, g(1))$ δηλαδή στη $(1, 1)$ είναι:

$$y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 1 = x - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = x \text{ αφού } g(1) = g'(1) = 1.$$

Δ4. i)

$$h(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Για $x > 0$, $h(x) = e^{x \ln x}$ συνεχής σαν σύνθεση και πράξεις μεταξύ συνεχών.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty} \right)}{\stackrel{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} \stackrel{x \ln x = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1 = h(0) \text{ άρα η } h \text{ συνεχής στο } [0, +\infty).$$

ii) Θεωρώ $k(x) = x^{2020} \left(3 - 2 \int_1^2 g(t) dt \right) + (1-x) \int_0^1 h(1-t) dt$ που είναι συνεχής στο $[0, 1]$.

$$\text{Είναι } k(0) = \int_0^1 h(1-t) dt. \text{ Θέτω } 1-t = u \Rightarrow dt = -du$$

$$\text{Για } t = 0 \Rightarrow u = 1 \text{ και για } t = 1 \Rightarrow u = 0$$

$$\text{άρα } k(0) = - \int_0^1 h(u) du = \int_0^1 h(u) du = \int_0^1 h(x) dx = \int_0^1 g(x) dx \text{ όμως } g(x) > 0 \text{ στο } [0, 1]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 g(x) dx > 0 \Rightarrow k(0) > 0.$$

$$\text{Επίσης } k(1) = 3 - 2 \int_1^2 g(t) dt$$

$$\text{Από Δ2 για } \lambda = 1: x^x \geq x, x > 0$$

$$\text{Δηλαδή } g(x) \geq x, x > 0$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

$$\text{Οπότε } \int_1^2 g(t)dt > \int_1^2 tdt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3 - 2\int_1^2 g(t)dt < 0$$

Άρα $k(1) < 0$

Επομένως $k(0) \cdot k(1) < 0$, άρα για την $k(x)$ ισχύει το θεώρημα Bolzano στο $[0,1]$ άρα η εξίσωση $k(x) = 0$ δηλαδή

$x^{2020} \left(3 - 2\int_1^2 g(t)dt \right) + (1-x) \int_0^1 h(1-t)dt = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.