

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
2021**

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

A3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει $|\eta \mu x| < |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

β) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ισχύει ότι $f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in A$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$, κοντά στο x_0 .

δ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

ε) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[a, \beta]$ μια μέγιστη τιμή, M , και μια ελάχιστη τιμή, m .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-x}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

B1. Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 3

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν.

Μονάδες 9

B4. Να βρείτε:

- (i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (μονάδες 4).
- (ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2}, \end{cases}$ με $a < -3$

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ2. (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ (μονάδες 3).

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\ln x = \frac{1}{x} \quad (1)$$

έχει μοναδική ρίζα, x_0 , η οποία ανήκει στο $(1, e)$.

Μονάδες 4

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει τύπο:

$$f(x) = (\ln x_0) \cdot (x + 1) - \ln x - 1$$

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 , το $f(x_0) = 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x \cdot e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 8

Δ4. Έστω η συνάρτηση $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, με $f(x) > \varphi(x)$, για κάθε $x > 0$. Θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(x, \varphi(x))$, με $x > 0$. Αν η απόσταση των σημείων A και B γίνεται ελάχιστη στο $x = x_0$, να δείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ .

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία. Σχολ. βιβλίο, σελ. 135

A2. Θεωρία. Σχολ. βιβλίο, σελ. 51

A3. Θεωρία. Σχολ. βιβλίο, σελ. 23

A4. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Θέτουμε όπου $x - 1 = y$, $y \in \mathbb{R}$, τότε $x = y + 1$. Τότε προκύπτει $f(y) = y \cdot e^{1-y}$, $y \in \mathbb{R}$.

Άρα $f(x) = x \cdot e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

B2. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων:

$$f'(x) = e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} = e^{1-x} \cdot (1-x)$$

$$f'(x) = 0 \stackrel{e^{1-x} \neq 0}{\Leftrightarrow} 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$f'(x) > 0 \stackrel{e^{1-x} > 0}{\Leftrightarrow} 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			
		max	

Η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$

Η f γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$

Η f έχει ολικό μέγιστο το $f(1) = 1$

B3. $f''(x) = -e^{1-x} \cdot (1-x) - e^{1-x} = e^{1-x} \cdot (-1+x-1) \Leftrightarrow f''(x) = e^{1-x} \cdot (x-2)$

$$f''(x) = 0 \stackrel{e^{1-x} \neq 0}{\Leftrightarrow} x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

$$f''(x) = 0 \stackrel{e^{1-x} > 0}{\Leftrightarrow} x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

X	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+
$f(x)$	↪		↩

Σ.Κ.

Η f κοίλη στο $(-\infty, 2]$

Η f κυρτή στο $[2, +\infty)$

Η C_f έχει σημείο καμπής το $\left(2, \frac{2}{e}\right)$

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ:

α) Η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες γιατί είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} \stackrel{u=1-x}{\underset{u \rightarrow +\infty}{=}} \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$$

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$.

γ) Οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} \stackrel{u=1-x}{\underset{u \rightarrow -\infty}{=}} \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0 = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \lambda^0 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot e^{1-x} \right) \stackrel{u=1-x}{\underset{u \rightarrow -\infty}{=}}$$

$$= \lim_{u \rightarrow -\infty} (1-u) \cdot e^u = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1-u}{e^{-u}} =$$

$$\stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\Delta L H}{=}} \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{(1-u)'}{(e^{-u})'} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{-u}} = 0 = \beta \in \mathbb{R}$$

Η ευθεία $\varepsilon: y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4.

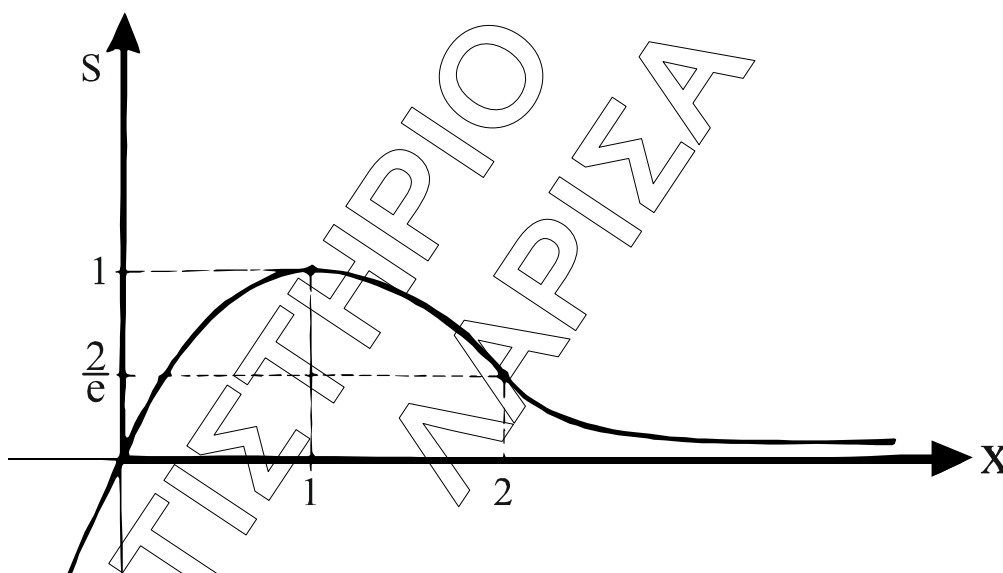
i) Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[1, +\infty)$:

$$f(-\infty, 1) \stackrel{f \text{ γνησίως αύξουσα}}{=} (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1)] = (-\infty, 1].$$

$$\text{διότι: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^{1-x}) \stackrel{u=1-x}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} (1-u)e^u = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$f([1, +\infty)) \stackrel{f \text{ γνησίως φθίνουσα}}{=} (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1)] = (0, 1]$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, 1]$.



ii)

- Αν $\lambda \leq 0$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα γιατί $\lambda \in (-\infty, 1]$ και $\lambda \notin (0, 1]$.
- Αν $0 < \lambda < 1$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς δύο ρίζες γιατί $\lambda \in (-\infty, 1]$ και $\lambda \in (0, 1]$.
- Αν $\lambda = 1$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα το $x = 1$ γιατί για $x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) = 1$ και για $x > 1 \Rightarrow f(x) < f(1) = 1$.

- Αν $\lambda > 1$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ δεν έχει ρίζα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. ΣΥΝΕΧΕΙΑ:

Η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική.

Η f συνεχής στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ διότι ισούται με τη βασική συνεχή συνάρτηση με τύπο $\sin x$.

Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 1$$

$$f(0) = 1$$

Άρα f συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Τελικά f συνεχής στο $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΣΤΟ $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(\alpha x^2 - 3x - 1)}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ δεν υπάρχει και άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2 i)

- f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ από το ερώτημα Γ1
- f παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = (\sin x)' = -\eta \mu x$
- $f(0) = 1$
- $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$
- $f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Άρα, ικανοποιούνται οι δύο πρώτες προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle αλλά δεν ικανοποιείται η τρίτη προϋπόθεση, οπότε δεν ισχύει το Θεώρημα Rolle.

i) $\forall x \in (0, \frac{3\pi}{2})$ είναι $f'(x) = -\eta\mu x$, οπότε: $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\xi = \eta\mu 0 \Leftrightarrow \xi = 2\kappa\pi$ ή $\xi = 2\kappa\pi + \pi \Leftrightarrow \xi = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$
 $0 < \xi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \kappa\pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \kappa < \frac{3}{2}$. Αφού $\kappa \in \mathbb{Z}, \kappa = 1$.
 Άρα $\xi = \pi$

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο $(-\infty, 0)$.

$$f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$$

$$\Delta = 36 + 12a$$

$$\text{Όμως } a < -3 \Rightarrow 12a < -36 \Leftrightarrow 36 + 12a < -36 + 36 \Leftrightarrow \Delta < 0$$

Άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη

Γ4. Έχουμε $f'(x) < 0, \forall x \in (-\infty, 0)$, αφού η $f'(x)$ είναι τριώνυμο με $\Delta < 0$ και αρνητικό συντελεστή για τον δευτεροβάθμιο όρο. Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

$$f'(x) = -\eta\mu x < 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$

Αφού f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $[0, \pi]$ και είναι συνεχής στο 0 θα είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το διάστημα $(-\infty, \pi]$.

$$f'(x) = -\eta\mu x > 0 \quad \forall x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

Προκύπτει έτσι ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

X	$-\infty$	0	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f'(X)$	-	-	○	+
$f(X)$	↘		↗	

ο.ε.
-1

Άρα η f έχει ελάχιστο στο π το $f(\pi) = -1$, άρα $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} =$

ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$

- $K(x)$ συνεχής στο $[1, e]$ ως διαφορά συνεχών
- $K(1) = \ln 1 - \frac{1}{1} = 0 - 1 = -1 < 0$
- $K(e) = \ln e - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} > 0$

Άρα $K(1) \cdot K(e) < 0$

Ικανοποιούνται επομένως οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano, άρα υπάρχει $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $K(x_0) = 0$.

ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ:

$K'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα $K(x)$ γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και άρα η x_0 είναι μοναδική ρίζα.

Δ2. $f(x) = (\ln x)(x+1) - \ln x - 1$

$f'(x) = \ln x + \frac{1}{x}$

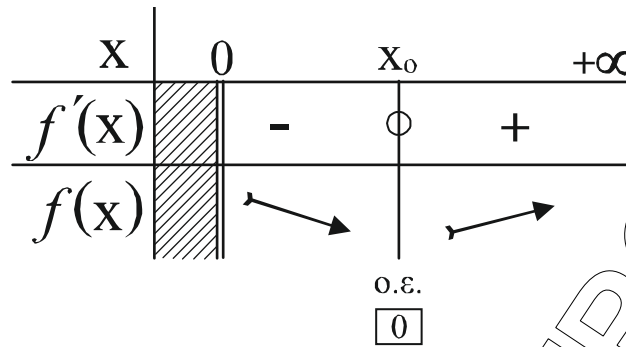
Η $f'(x)$ έχει προφανή ρίζα το x_0 από το ερώτημα Δ1.

$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα f' γνησίως αύξουσα

Άρα η x_0 είναι μοναδική ρίζα της $f'(x)$.

Για $0 < x < x_0 \xrightarrow{f' \text{ γν. αύξ.}} f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_0]$

Για $x > x_0 \xrightarrow{f' \text{ γν. αύξ.}} f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$



Άρα έχει ολικό ελάχιστο στο x_0 με

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0} \cdot (x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 \stackrel{\text{από } \Delta 1}{=} \frac{x_0 + 1}{x_0} - \frac{1}{x_0} - 1 = 1 + \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0} - 1 = 0$$

Δ3 $g(x) = x \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$, $x \in \mathbb{R}$

Για $x < 0$, $g(x) < 0$ και $h(x) > 0$. Άρα η $g(x) = h(x)$ είναι αδύνατη.

Για $x = 0$, $g(0) = 0$ και $h(0) = 1$. Άρα $g(x) \neq h(x)$.

Για $x > 0$:

Αναζήτηση κοινού σημείου των C_g, C_h :

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow x \cdot e^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \ln(x \cdot e^{-x}) = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x + \ln e^{-x} = (x+1) \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) \Leftrightarrow \ln x - x = (x+1) \cdot (\ln x_0 - \ln e) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x - x = (x+1) \cdot (\ln x_0 - 1) \Leftrightarrow \ln x - x = \ln x_0 \cdot (x+1) - x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x_0(x+1) - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$$

αφού από το Δ2 η f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο για $x = x_0$ το $f(x_0) = 0$.

Άρα οι C_g και C_h έχουν μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη x_0 .

Κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο με τετμημένη $3x_0$:

$$g'(x) = (x)'e^{-x} + x \cdot (e^{-x})' = e^{-x} - x \cdot e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x_0) = e^{-x_0} - x_0 \cdot e^{-x_0} = e^{-x_0} (1 - x_0) = \frac{1 - x_0}{e^{x_0}}.$$

$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) \cdot (x+1)' = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot (\ln x_0 - 1) =$$

$$= \frac{x_0^{x_0+1}}{e^{x_0+1}} \cdot (\ln x_0 - 1)$$

Για να έχουν κοινή εφαπτομένη οι δύο γραφικές παραστάσεις στο κοινό τους σημείο, πρέπει και αρκεί

$$g'(x_0) = h'(x_0) \Leftrightarrow \frac{1 - x_0}{e^{x_0}} = \frac{x_0^{x_0+1}}{e^{x_0+1}} \cdot (\ln x_0 - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - x_0}{e^{x_0}} = \frac{x_0^{x_0+1}}{e \cdot e^{x_0}} \cdot (\ln x_0 - 1) \Leftrightarrow \frac{\ln x_0 = \frac{1}{x_0}}{e^{x_0}} \cdot (\ln x_0 - 1) \Leftrightarrow e(1 - x_0) = x_0^{x_0} \cdot x_0 \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e(1 - x_0) = x_0^{x_0} \cdot x_0 \cdot \frac{1 - x_0}{x_0} \Leftrightarrow e(1 - x_0) = x_0^{x_0} \cdot (1 - x_0) \Leftrightarrow e = x_0^{x_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln e = \ln x_0^{x_0} \Leftrightarrow 1 = x_0 \cdot \ln x_0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0}, \text{ που ισχύει από Δ1.}$$

Δ4.

$$A(x, f(x)), \quad B(x, \varphi(x))$$

$$(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (\varphi(x) - f(x))^2} =$$

$$= \sqrt{(\varphi(x) - f(x))^2} = |\varphi(x) - f(x)| \stackrel{f(x) > \varphi(x)}{=} f(x) - \varphi(x)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $d(x) = f(x) - \varphi(x)$ με $x \in (0, +\infty)$.

Έστω ότι η $\varphi(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ .

Έστω ότι η $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Αφού η συνάρτηση d έχει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο x_0 στο οποίο είναι παρ/μη, από το θεώρημα Fermat προκύπτει $d'(x_0) = 0$.

$$\text{Έχουμε } d'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0) \text{ οπότε } d'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \varphi'(x_0)$$

Από Δ2 η f έχει ελάχιστο στο x_0 με $f'(x_0) = 0$

Άρα $\varphi'(x_0) = 0$ δηλαδή το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ .