

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

2023

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 6

- A2.** Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

- A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle (μονάδες 3) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (μονάδες 2).

Μονάδες 5

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$.

β) Η γραφική παράσταση μιας πολωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ , ισχύει ότι $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

δ) Αν η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια «ένα προς ένα» ("1-1") συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

ε) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \ln x$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = g \circ h$

Μονάδες 5

Έστω $f(x) = \frac{4 - x^2}{x}, x > 0$

B2. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι $\frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1+x^2)}{f(x)}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x} + a, & x \geq 1 \end{cases}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$\int_2^3 x f(x) dx = 1$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $a = 0$.

Μονάδες 4

Γ2. i) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» ("1–1") (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ4. Έστω (ε) : $y = -x + 2$ η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x \geq 1$, την ευθεία (ε) , τον άξονα x/x και την ευθεία $x = e$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x-1} = \ell \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{1}{3}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0, 1)$, στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με

$$\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}.$$

Μονάδες 6

Δ4. Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα $(0, 2)$ με $F(x_1) = G(x_2) = 0$, να αποδείξετε ότι:

i) $F(x_2) + G(x_1) = 0$

(μονάδες 4)

ii) η εξίσωση

$$x_1 F(x) + x_2 G(x) = x_1 + x_2 - 2x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x_1, x_2) .

(μονάδες 5)

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο, σελίδα 111
- A2.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο, σελίδα 104
- A3.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο, σελίδα 128
- A4.** α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x}$$

$$h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } h(x) = \ln x$$

- B1.** Πρέπει: $x \in A_h$ και $h(x) \in A_g \Leftrightarrow x > 0$ και $\ln x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x > 0$ και $x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.
Άρα $A_f = (0, +\infty)$.

$$f(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2 \ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{x} = \frac{4 - x^2}{x}$$

- B2.** i) $f'(x) = \left(\frac{4 - x^2}{x}\right)' = \frac{4}{x^2} - 1 < 0$, για κάθε $x > 0$

Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

ii) $\frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e} \Leftrightarrow \frac{4 - \pi^2}{\pi} < \frac{4 - e^2}{e} \Leftrightarrow f(\pi) < f(e) \xrightarrow{f \text{ γν. φθιν.}} \pi > e$ ισχύει

B3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{4}{x} - x\right) = (+\infty) - 0 = +\infty$

Η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x^2} - 1\right) = 0 - 1 = -1 = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \underset{-1}{\lambda} \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4}{x} - x + x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 = \beta \in \mathbb{R}$$

Η ευθεία $y = -x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1+x^2)}{f(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-x} = 0$$

$$\left| \frac{\sin(1+x^2)}{f(x)} \right| \leq \left| \frac{1}{f(x)} \right| \Leftrightarrow -\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\sin(1+x^2)}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|f(x)|} \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|f(x)|}$$

Από κριτήριο παρεμβολής: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1+x^2)}{f(x)} = 0$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 \cdot x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x} + a, & x \geq 1 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\int_2^3 x \cdot f(x) dx = 1$$

Γ1.

$$\int_2^3 x \cdot f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 x \cdot \left(\frac{1}{x} + a \right) dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\int_2^3 (1 + a \cdot x) dx = 1 \Leftrightarrow \left[x + \frac{a \cdot x^2}{2} \right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(3 + \frac{a \cdot 3^2}{2} \right) - \left(2 + \frac{a \cdot 2^2}{2} \right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$3 + \frac{9 \cdot a}{2} - 2 - 2 \cdot a = 1 \Leftrightarrow 9 \cdot a - 4 \cdot a = 0 \Leftrightarrow$$

$$5 \cdot a = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Γ2. i)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 \cdot x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3 \cdot x + 3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3 \cdot x + 2}{x - 1}$$

$$\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^2 - 3x + 2)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 \cdot x - 3}{1} = 2 - 3 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{1} = -1$$

Άρα $f'(1) = -1$, δηλαδή ορίζεται η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο με $x_0 = 1$.

ii) $f(1) = 1, \quad f'(1) = -1$

$$\varepsilon : y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow$$

$$y = -x + 1 + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2$$

$$f'(1) = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi\omega = \varepsilon\phi 135^\circ \Leftrightarrow \omega = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}.$$

Γ3. Αν $x < 1$: $f'(x) = 2 \cdot x - 3 < 0$, για κάθε $x < 1$

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$

$$\text{Αν } x > 1: f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \text{ για κάθε } x > 1$$

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$

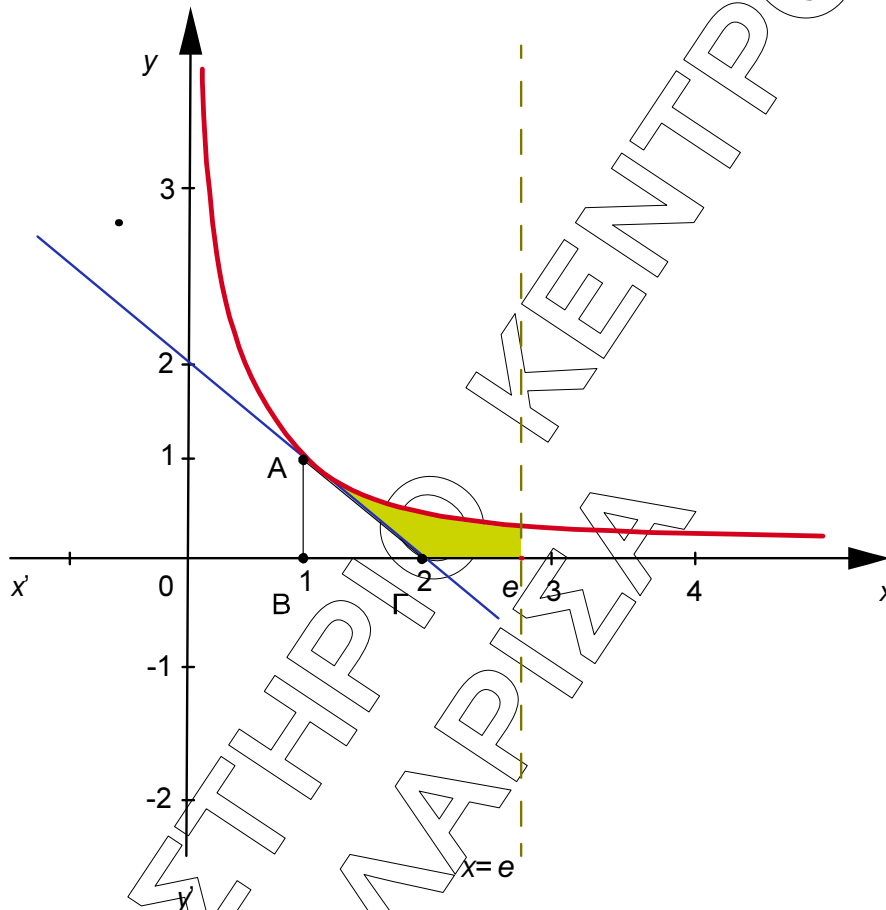
Η f παρ/μη στο $x = 1$ άρα και συνεχής στο $x = 1$
 οπότε η f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα είναι και 1-1

$$f((-\infty, +\infty)) \stackrel{f \text{ γν. φθίν.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

γιατί: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3 \cdot x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

Γ4.



Η ε για $y = 0 \Leftrightarrow -x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Το σημείο τομής της ε με τον $x'x$ είναι $A(2,0)$

$f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$, για κάθε $x > 1$

Άρα η f κυρτή στο $[1, +\infty)$ οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της σε κάθε σημείο εκτός από το σημείο επαφής. Δηλαδή $f(x) \geq -x + 2$

$$E(\Omega) = \int_1^e f(x) dx - E_{\triangle AB\Gamma} = \int_1^e \frac{1}{x} dx - \frac{A\Gamma \cdot B\Gamma}{2} =$$

$$= [\ln x]_1^e - \frac{1 \cdot 1}{2} = \ln e - \ln 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

$$f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R} \quad \mu\epsilon \quad f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa, \quad \kappa \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2 \cdot x}{x-1} = \ell \in \mathbb{R}$$

Δ1. Θέτω:

$$\frac{f(x) - 2 \cdot x}{x-1} = g(x) \Leftrightarrow f(x) - 2 \cdot x = g(x) \cdot (x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot (x-1) + 2 \cdot x \quad \mu\epsilon \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \ell$$

Η f συνεχής στο $x = 1$ ως πράξεις συνεχών άρα

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [g(x) \cdot (x-1) + 2 \cdot x] = \ell \cdot 0 + 2 = 2$$

$$\text{Άρα } f(1) = 2 \Leftrightarrow \ln(2-1) - \frac{1}{1} + \kappa = 2 \Leftrightarrow \ln 1 - 1 + \kappa = 2 \Leftrightarrow \kappa = 3.$$

Δ2. $f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3, \quad x \in (0, 2)$

$$f'(x) = \frac{1}{2-x} \cdot (2-x)' + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + x - 2}{x^2(x-2)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ -\frac{4}{2} = -2 \notin (0, 2) \end{cases}$$

$$f'(x) \gtrless 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x-2 < 0 \\ x^2 > 0 \end{matrix} \quad x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

x	0	1	2
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

$$\Delta_1 = f((0, 1]) \stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 2]$$

$$\text{γιατί: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right] = \ln 2 - (+\infty) + 3 = -\infty$$

$$f(1) = 2$$

Το $0 \in \Delta_1$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζα $x_1 < 1$ και είναι μοναδική γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα.

$$\Delta_2 = f([1, 2)) \stackrel{f \text{ γν. φθίν.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 2]$$

$$\text{γιατί: } \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right] = (-\infty) - \frac{1}{2} + 3 = -\infty$$

$$\text{γιατί: } \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(2-x) \stackrel{u=2-x}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

Το $0 \in \Delta_2$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζα $x_2 > 1$ και είναι μοναδική γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln \frac{5}{3} > 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) > f(x_1) \stackrel{f \text{ γν. αυξ. στο } (0,1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{3} > x_1.$$

Δ3. Η f συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$

Η f παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$

Από Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right)$

$$\text{Τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} \stackrel{f(x_1)=0}{=} \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3 \cdot x_1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0 \text{ για κάθε } x \in (0,1)$$

Άρα η f' γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$ οπότε το ξ είναι μοναδικό.

Δ4. F, G αρχικές της f στο $(0,2)$

$$F(x_1) = G(x_2) = 0$$

i) F αρχική της f άρα $F'(x) = f(x)$

G αρχική της f άρα $G'(x) = f(x)$

Άρα $F'(x) = G'(x)$ οπότε ισχύει $F(x) = G(x) + c$, (1) $c \in \mathbb{R}$

$$\text{Η (1) για } x = x_1: F(x_1) = G(x_1) + c \Leftrightarrow c = -G(x_1)$$

$$\underline{\text{H (1) για } x = x_2: F(x_2) = G(x_2) + c \stackrel{c = -G(x_1)}{\Leftrightarrow} F(x_2) = -G(x_1)}$$

ii) Έστω $\kappa(x) = x_1 \cdot F(x) + x_2 \cdot G(x) - x_1 - x_2 + 2 \cdot x$, $x \in (0, 2)$

- Η $\kappa(x)$ συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών.

$$\kappa(x_1) = x_1 \cdot F(x_1) + x_2 \cdot G(x_1) - x_1 - x_2 + 2 \cdot x_1 = -x_2 \cdot F(x_2) + x_1 - x_2$$

$$\kappa(x_2) = x_1 \cdot F(x_2) + x_2 \cdot G(x_2) - x_1 - x_2 + 2 \cdot x_2 = -x_1 \cdot F(x_2) + x_2 - x_1$$

$$F'(x) = f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (x_1, x_2)$$

$$\text{γιατί: Αν } x_1 < x \leq 1 \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$\text{Αν } 1 < x < x_2 \stackrel{f \text{ γν. φθίν.}}{\Rightarrow} f(x) > f(x_2) \Rightarrow f(x) > 0$$

Άρα η $F(x)$ γν. αύξουσα στο $[x_1, x_2]$ οπότε

$$\text{για } x_1 < x_2 \stackrel{F \text{ γν. αύξ.}}{\Rightarrow} F(x_1) < F(x_2) \Rightarrow 0 < F(x_2).$$

Άρα η $\kappa(x_1) < 0$ γιατί $-x_2 \cdot F(x_2) < 0$ και $x_1 - x_2 < 0$

$$\text{και } \kappa(x_2) > 0 \text{ γιατί } x_1 \cdot F(x_2) > 0 \text{ και } x_2 - x_1 > 0$$

Άρα $\kappa(x_1) \cdot \kappa(x_2) < 0$

Από Θ. Bolzano η εξίσωση $\kappa(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο (x_1, x_2) .

$$\kappa'(x) = x_1 \cdot F'(x) + x_2 \cdot G'(x) + 2 = x_1 \cdot f(x) + x_2 \cdot f(x) + 2 > 0.$$

Άρα η $\kappa(x)$ γνησίως αύξουσα οπότε η ρίζα είναι μοναδική.