

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

2024

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό ζ μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \zeta$.

Μονάδες 6

A2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η σύνθεση της f με τη g , δηλαδή η συνάρτηση $g \circ f$, ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

β) Ισχύει ότι $|\eta \mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Ισχύει $(\sigma \phi x)' = \frac{1}{\eta \mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta \mu x = 0\}$.

δ) Για κάθε συνάρτηση ισχύει ότι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα είναι το ολικό της μέγιστο.

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x) dx \geq 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g:[1,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

και $h:[1,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

B1. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f = \frac{g}{h}$ και $r = g \cdot h$.

Μονάδες 6

Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x > 1 \quad \text{και} \quad r(x) = x - \frac{1}{x}, \quad x \geq 1.$$

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 2) και ότι $f^{-1} = f$ (μονάδες 5), όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f .

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης r .

Μονάδες 6

B4. Να λύσετε την εξίσωση $(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4 + e^\lambda, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3 + \lambda, & x \geq 2 \end{cases}$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 0$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και στη συνέχεια να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατά της.

Μονάδες 6

Γ3. i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[0, 3]$.
(μονάδες 4)

ii) Να βρείτε, αν υπάρχει, $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0, f(0))$ και $E(3, f(3))$.
(μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Κινητό σημείο M ξεκινά από το σημείο $A(2, 0)$ και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα $v = 0,5$ μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η γωνία $\hat{\omega} = \hat{AOM}$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό σημείο M θα συναντήσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{\ln x + ax}{x},$$

όπου $a \in \mathbb{R}$.

Δίνεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f((0, +\infty)) = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $a = 1$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, x_0 , η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Μονάδες 6

Δ3. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1 = 2$ και $x^2 = 4$.

(μονάδες 3)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $2^x \leq x^2$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.

(μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x}.$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $x = -\ln 2$ και $x = 0$, και περικλείεται από αυτές, τον άξονα $x'x$ και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 76.
- A2.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 155.
- A3.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 216.
- A4.** α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

$$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \geq 1$$

$$h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \geq 1$$

$$\begin{aligned} \text{B1.} \quad f(x) &= \left(\frac{g}{h} \right)(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \\ &= \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}, \quad x > 1 \quad (x \in D_g \cap D_h - \{x \mid h(x) = 0\}) \\ r(x) &= g(x)h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \\ &= x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}, \quad x \geq 1 \quad (x \in D_g \cap D_h) \end{aligned}$$

B2. Έστω $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2-1) = (x_1-1)(x_2+1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1x_2 + x_1 - x_2 - 1 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Άρα η f είναι 1-1 και άρα είναι αντιστρέψιμη.

Εύρεση του τύπου της αντίστροφης:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = x+1 \Leftrightarrow yx - x = y+1 \Leftrightarrow (y-1)x = y+1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1} \end{aligned}$$

Πρέπει $y \neq 1$ και

$$\frac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{y+1-y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y > 1$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x > 1,$$

οπότε $f(x) = f^{-1}(x)$ για κάθε $x > 1$

$$\text{Άρα } f = f^{-1}$$

B3. $r(x) = x - \frac{1}{x}, x \geq 1$

Κατακόρυφη Ασύμπτωτη:

Η $r(x)$ είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Πλάγια Ασύμπτωτη:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (r(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

Άρα η ευθεία $\delta: y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $r(x)$ καθώς στο $+\infty$.

B4. Πρέπει:

- $x \in D_{f^{-1}} : x > 1$
- $f(x) \in D_{f^{-1}} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} > 1 \stackrel{x-1>0}{\Leftrightarrow} x+1 > x-1 \Leftrightarrow 1 > -1$ που ισχύει
- $x \in D_r \Leftrightarrow x \geq 1$. Επομένως $x > 1$.

$$(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x} \Leftrightarrow$$

$$x^3 = x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-4)(x^2-1) = 0. \text{ Προκύπτει: } \begin{cases} x = 4 \\ x = 1, \text{ απορρίπτεται} \\ x = -1, \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x + 4 + e^\lambda) = -4 + 4 + e^\lambda = e^\lambda$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + 4x - 3 + \lambda) = 4 - 3 + \lambda = 1 + \lambda$
- $f(2) = 1 + \lambda$

$$\text{Άρα } e^\lambda = 1 + \lambda$$

Έχει προφανή ρίζα $\lambda = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\lambda) = e^\lambda - \lambda - 1$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$g'(\lambda) = e^\lambda - 1$$

$$g'(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow e^\lambda \geq 1 \Leftrightarrow \lambda \geq 0$$

λ	0	
$g'(\lambda)$	-	+
$g(\lambda)$		

min = 0

$\forall \lambda \neq 0$ είναι $g(\lambda) > 0$.

Άρα έχει μοναδική ρίζα τη $\lambda = 0$

Γ2. Για $0 \leq x < 2$ έχουμε:

$$f'(x) = -2 < 0 \Rightarrow f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } [0, 2)$$

Για $x \geq 2$ έχουμε:

$$f'(x) = -2x + 4 < 0 \quad \forall x > 2 \Rightarrow f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } [2, +\infty).$$

Αφού η f είναι συνεχής στο, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Στο $x_0 = 0$ η f έχει ολικό μέγιστο το $f(0) = 5$.

Γ3.

(i) Η f συνεχής στο $[0, 3] \subseteq [0, +\infty)$

Η f παρ/μη στο $[0, 2)$ και $(2, 3]$

Στο $x_0 = 2$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 4 + e^{\lambda} - 1 - \lambda}{x - 2} \stackrel{(\lambda=0)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x - 2)}{x - 2} = -2$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x - 2)^2}{x - 2} = 0$$

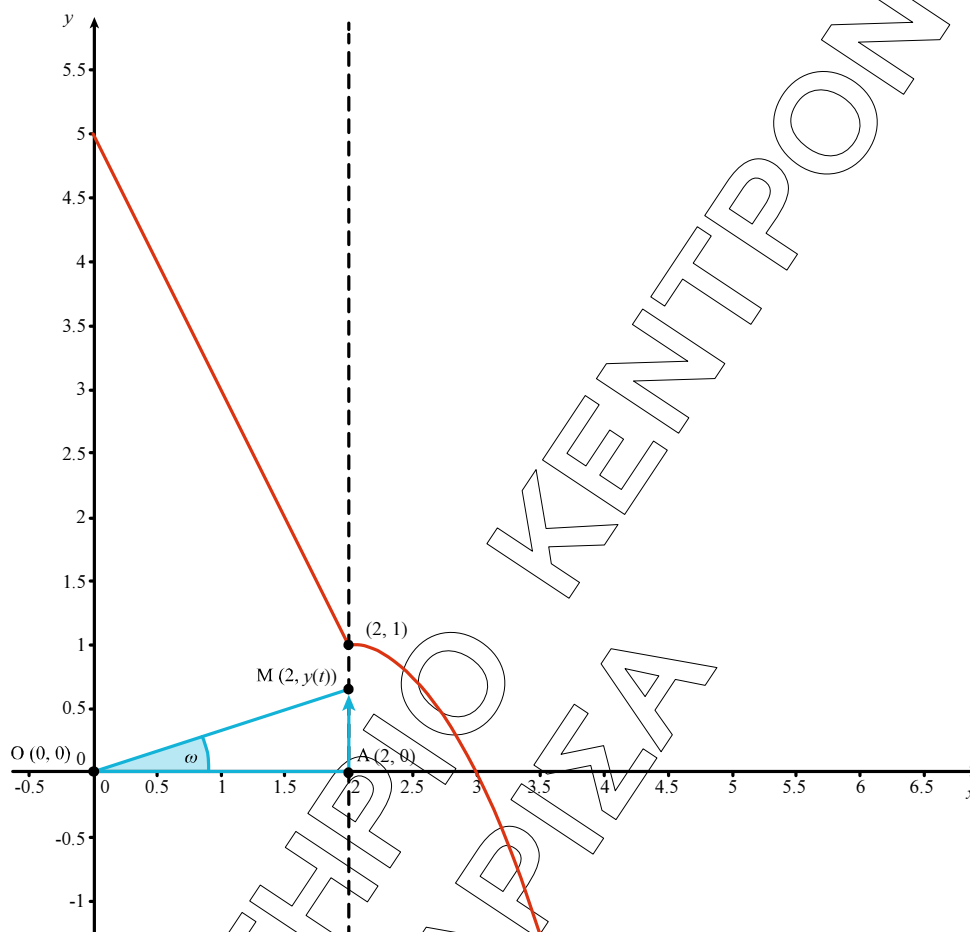
Άρα δεν υπάρχει ο παράγωγος αριθμός $f'(2)$ και άρα δεν εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο $[0, 3]$.

(ii) Αναζητούμε αν υπάρχει $\xi \in (0, 3)$: $f'(\xi) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}$

Για $\xi \in (0, 2)$ πρέπει $-2 = \frac{0 - 5}{3}$ άτοπο

Για $\xi \in (2, 3)$ πρέπει $-2\xi + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow 2\xi = 4 + \frac{5}{3} \Leftrightarrow 2\xi = \frac{17}{3} \Leftrightarrow \xi = \frac{17}{6}$.

Γ4.



$$y'(t) = \frac{1}{2}$$

$$y(t_0) = f(2) = 1$$

$$\varepsilon\varphi(\omega(t)) = \frac{y(t)}{2} \Rightarrow (\varepsilon\varphi(\omega(t)))' = \frac{1}{2}y'(t) \Leftrightarrow (1 + \varepsilon\varphi^2(\omega(t)))\omega'(t) = \frac{1}{2}y'(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + \varepsilon\varphi^2(\omega(t_0)))\omega'(t_0) = \frac{1}{2}y'(t_0) \Rightarrow (1 + \frac{1}{4})\omega'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{4}\omega'(t_0) = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega'(t_0) = \frac{1}{5} \text{ rad / sec.}$$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = \frac{\ln x + ax}{x}, \quad x > 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \text{με } f((0, +\infty)) = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$$

Δ1.

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x} + a\right)x - (\ln x + ax)}{x^2} = \frac{1 + ax - \ln x - ax}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad x > 0$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$$

x	0	e
f'(x)	+	-
f(x)	↗	↘

Προκύπτει ότι έχει ολικό μέγιστο στη θέση e , το $f(e)$.

Όμως το σύνολο τιμών της είναι το $\left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$, άρα:

$$f(e) = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1 + ae}{e} = \frac{e + 1}{e} \Leftrightarrow 1 + ae = e + 1 \Leftrightarrow ae = e \Leftrightarrow a = 1$$

Δ2. Η f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln \frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2}} = 2 \ln \frac{1}{2} + 1 = -2 \ln 2 + 1 < 0$$

(διότι $-2 \ln 2 + 1 < 0 \Leftrightarrow 2 \ln 2 > 1 \Leftrightarrow \ln 2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln 2 > \ln \sqrt{e} \Leftrightarrow 2 > \sqrt{e}$ που ισχύει)

$$f(1) = \frac{\ln 1 + 1}{1} = 1 > 0$$

$$\text{Άρα } f(1) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

Από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \subseteq (0, e]$ ώστε $f(x_0) = 0$, το οποίο είναι μοναδικό στο $(0, e]$, αφού f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$.

$$f([e, +\infty)) \stackrel{f \text{ γν.φθίν.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e)\right)^* = \left(1, \frac{1}{e} + 1\right]$$

Προκύπτει ότι $0 \notin f([e, +\infty))$ άρα ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ρίζα της $f(x) = 0$ στο $[e, +\infty)$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + x^{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}}{x} \stackrel{\text{DL'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + 1}{1} = 1$$

Δ3. i) $f(x) = f(4)$

Προφανείς ρίζες $x_1 = 2, x_2 = 4$ οι οποίες είναι μοναδικές αφού f γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

$$\text{ii)} \quad 2^x \leq x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \leq \ln x^2 \Leftrightarrow x \ln 2 \leq 2 \ln x \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln x}{x} \geq \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} + 1 \geq \frac{\ln 2}{2} + 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(2)$$

Για $x \in (0, e]$ η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε

$$f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq e$$

Για $x \in (e, +\infty)$ η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα οπότε

$$f(x) \geq f(2) = f(4) \Leftrightarrow f(x) \geq f(4) \Leftrightarrow x \leq 4 \Leftrightarrow e < x \leq 4.$$

Τελικά $x \in [2, 4]$

Δ4. $g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x}$

$$E = \int_{-\ln 2}^0 |g(x)| dx = \int_{-\ln 2}^0 \left| f(e^x) \frac{1-x}{e^x} \right| dx$$

$$\text{Θέτουμε } u = e^x \Rightarrow x = \ln u \Rightarrow dx = \frac{1}{u} du$$

$$\text{Για } x = -\ln 2 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow u_2 = 1$$

$$\text{Άρα } E = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| f(u) \frac{1 - \ln u}{u} \right| \frac{1}{u} du$$

$$\text{Έχουμε } \frac{1-\ln u}{u} > 0 \quad \forall u \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \text{ οπότε } E = \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(u)| \frac{1-\ln u}{u} \cdot \frac{1}{u} du =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} |f(u)| \frac{1-\ln u}{u^2} du + \int_{x_0}^1 |f(u)| \frac{1-\ln u}{u^2} du$$

$$\text{Αν } x \in \left[\frac{1}{2}, x_0\right] \stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{\Rightarrow} f(x) \leq f(x_0) = 0$$

$$\text{Αν } x \in [x_0, 1] \stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{\Rightarrow} f(x) \geq f(x_0) = 0$$

$$\text{Άρα } E = \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} -f(u) \frac{1-\ln u}{u^2} du + \int_{x_0}^1 f(u) \frac{1-\ln u}{u^2} du$$

$$\text{Όμως } f'(u) = \frac{1-\ln u}{u^2} \text{ οπότε}$$

$$E = \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} -f(u) f'(u) du + \int_{x_0}^1 f(u) f'(u) du =$$

$$\left[-\frac{1}{2} f^2(u) \right]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \left[-\frac{1}{2} f^2(u) \right]_{x_0}^1 =$$

$$-\frac{1}{2} f^2(x_0) + \frac{1}{2} f^2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f^2(1) - \frac{1}{2} f^2(x_0) =$$

$$= \frac{1}{2} (-2 \ln 2 + 1)^2 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{(1 - \ln 4)^2}{2} + \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$