

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

Μονάδες 5

A3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι "1-1". Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης, f^{-1} , της f είναι το σύνολο τιμών της f .

β) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

γ) Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2\nu}} = -\infty$.

δ) Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

ε) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + ax^2 + 9x - 3$, όπου $a \in \mathbb{R}$. Δίνεται ακόμα ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$.

B1. Να βρείτε την τιμή του a .

Μονάδες 5

Στα ερωτήματα **B2** έως **B4** να θεωρήσετε ότι $a = -6$.

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 10

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

B4. Έστω $g(x) = x + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Αν $\xi \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$, αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x \eta \mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ (μονάδες 2) αλλά όχι παραγωγίσιμη στο x_0 (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $(\epsilon): y = x + \frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Μονάδες 5

- Γ4.** Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq 0$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης x του M , $x'(t)$, να είναι θετικός για κάθε $t \geq 0$. Να εξετάσετε εάν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης x του M .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και μια παράγουσα, F , της f στο $(0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει ότι:

$$x f(x) = 2F(x) \ln x, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Δίνεται ακόμα ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία (Ε): $y = 2x$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}}$, $x > 0$, είναι σταθερή.

Μονάδες 6

- Δ2.** i) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$. (μονάδες 4)

- ii) Να αποδείξετε ότι $F(1) = 1$ (μονάδες 3) και $F(x) = x^{\ln x}$, για κάθε $x > 0$ (μονάδες 2).

Μονάδες 9

- Δ3.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση F (μονάδες 2) και να λύσετε την εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x - 1)^2$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ (μονάδες 3).

Μονάδες 5

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης F , τις ευθείες $x = 1$, $x = e$ και τον άξονα $x'x$ ισχύει $E > 2e - 3$.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 186
A2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 76
A3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 161
A4. α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

- B1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

$$f'(x) = (x^3 + ax^2 + 9x - 3)' = 3x^2 + 2ax + 9$$

Αφού f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $D_f = \mathbb{R}$, από θεώρημα Fermat πρέπει:

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + 9 = 0 \Rightarrow 2a = -12 \Rightarrow a = -6$$

$$\text{Για } a = -6 \text{ έχω } f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$$

- B2. Για:

$$a = 6 : f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow$$

$$x < 1 \quad \text{ή} \quad x > 3$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	$\circ$	-	$\circ$	+
f					

Έστω:

$$A_1 = (-\infty, 1)$$

$$A_2 = [1, 3]$$

$$A_3 = (3, +\infty)$$

$$f((0, 1)) \xrightarrow{f \text{ αύξουσα}} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = (-3, 1)$$

Αφού $0 \in f((0, 1))$ και f αύξουσα στο $(0, 1)$ υπάρχει 1 μόνο ρίζα $x_1 \in (0, 1)$ της εξίσωσης $f(x) = 0$.

$$f(A_2) = f([1, 3]) \xrightarrow{f \text{ φθίνουσα}} [f(3), f(1)] = [-3, 1]$$

Αφού $0 \in f([1, 3])$ και f φθίνουσα στο $[1, 3]$ υπάρχει 1 μόνο ρίζα $x_2 \in [1, 3]$ της εξίσωσης $f(x) = 0$.

$$f(A_3) = f((3, +\infty)) \xrightarrow{f \text{ αύξουσα}} \left(\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-3, +\infty)$$

Αφού $0 \in f(A_3)$ και f φθίνουσα στο A_3 υπάρχει 1 μόνο ρίζα $x_3 \in (3, +\infty)$ της $f(x) = 0$.

Αφού $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in [1, 3]$ και $x_3 \in (3, +\infty)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 θετικές ρίζες.

B3. $f''(x) = (3x^2 - 12x + 9)' = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+
f			

f κοίλη στο $(-\infty, 2]$

f κυρτή στο $[2, +\infty)$

σ.κ. της C_f είναι το $\Sigma((2, f(2))) = \Sigma(2, -1)$

B4. Ισχύει $g(x) = x + f(x)$ (1), $x \in \mathbb{R}$ και $g'(x) = 1 + f'(x)$ (2), $x \in \mathbb{R}$.

Αν ε_1 η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ τότε

$\varepsilon_1: y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$ ή $\varepsilon_1: y = f'(\xi) \cdot x + f(\xi) - \xi f'(\xi)$

Αν ε_2 η εφαπτομένη της C_g στο $B(\xi, g(\xi))$ τότε

$\varepsilon_2: y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi)$ ή $\varepsilon_2: y = g'(\xi) \cdot x + g(\xi) - \xi g'(\xi)$

Τα σημεία τομής των ε_1 και ε_2 προκύπτουν από την εξίσωση:

$f'(\xi)x + f(\xi) - \xi f'(\xi) = g'(\xi)x + g(\xi) - \xi g'(\xi) \Rightarrow$

$f'(\xi)x + f(\xi) - \xi f'(\xi) = (1 + f'(\xi))x + \xi + f(\xi) - \xi \cdot (1 + f'(\xi))$

$f'(\xi)x + f(\xi) - \xi f'(\xi) = x + f'(\xi)x + \xi + f(\xi) - \xi - \xi f'(\xi)$

$x = 0$

Άρα $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται στον $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \cdot \eta\mu x) = e^0 \cdot \eta\mu 0 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$

$f(0) = 0$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \cdot \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right) = e^0 \cdot 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \stackrel{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ |x|=x}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = +\infty \end{aligned}$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

Γ2. Η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως γινόμενο συνεχών.

Η f συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών.

Η f συνεχής στο $x_0 = 0$.

Άρα η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \cdot \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right] = 0 \cdot 0 = 0 = \lambda \in \mathbb{R}$$

γιατί: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

$$\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|}$$

Από κρ. Παρεμβολής: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \overset{=0}{\lambda} \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \eta\mu x) = 0 = \beta \in \mathbb{R}$$

γιατί: $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -e^x \leq e^x \cdot \eta\mu x \leq e^x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$$

Από κρ. Παρεμβολής: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \eta\mu x) = 0$

Η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \stackrel{\substack{x \rightarrow +\infty \\ |x|=x}}{=} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = \sqrt{1+0} = 1 = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \cancel{x}^1 \cdot x \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} \stackrel{\substack{x \rightarrow +\infty \\ |x|=x}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \\ &= \frac{1}{2} = \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Η ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Γ3. Έστω $g(x) = f(x) - (x + \frac{1}{2}) = e^x (\eta\mu x) - x - \frac{1}{2}$

- Η g συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχών.

$$g(-\pi) = e^{-\pi} \cdot \eta\mu(-\pi) - (-\pi) - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$$

$$g(0) = e^0 \cdot \eta\mu(0) - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

- $g(-\pi) \cdot g(0) < 0$

Από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x + \frac{1}{2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-\pi, 0)$.

Γ4. $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$, $x(t) \geq 0$ και $x'(t) > 0$

$$y'(t) = \frac{2 \cdot x(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{2 \cdot \sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

$$\text{Για } t = t_0: y'(t_0) = \frac{2 \cdot x(t_0) \cdot x'(t_0) + x'(t_0)}{2 \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \stackrel{y'(t_0) = x'(t_0)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x'(t_0) = \frac{x'(t_0) \cdot [2 \cdot x(t_0) + 1]}{2 \cdot \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \stackrel{x'(t_0) > 0}{\Leftrightarrow} 1 = \frac{2 \cdot x(t_0) + 1}{2 \cdot \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} = 2 \cdot x(t_0) + 1$$

$$\text{Άρα } 4 \cdot [x^2(t_0) + x(t_0)] = [2 \cdot x(t_0) + 1]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot x^2(t_0) + 4 \cdot x(t_0) = 4 \cdot x^2(t_0) + 4 \cdot x(t_0) + 1 \Leftrightarrow 0 = 1 \quad \text{Αδύνατη}$$

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του M .

Σχόλιο: Κανονικά, η περίπτωση $t = 0$ (όπου $x(0) = 0$) θα έπρεπε να εξεταστεί ξεχωριστά και να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση y δεν είναι παραγωγίσιμη γι' αυτήν την τιμή. Όμως, αφού δίνεται $x'(t) > 0$, οι θεματοδότες προφανώς θεωρούν ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, άρα υπονοείται η χρήση της παραγώγου στα σημεία που αυτή ορίζεται (δηλαδή για $t > 0$ όπου $x(t) > 0$).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει $x \cdot f(x) = 2 \cdot F(x) \cdot \ln x \Leftrightarrow$

$$\bullet \quad x \cdot F'(x) = 2 \cdot F(x) \cdot \ln x \Leftrightarrow F'(x) = 2 \cdot F(x) \cdot \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$\bullet \quad (x^{\ln x})' = (e^{\ln x \cdot \ln x})' = (e^{\ln^2 x})' = e^{\ln^2 x} \cdot (\ln^2 x)' = x^{\ln x} \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\bullet \quad 1 \cdot f(1) = 2 \cdot F(1) \cdot \ln 1 \Leftrightarrow f(1) = 0 \text{ και } f'(1) = 2$$

Η $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}}$ συνεχής ως πράξεις συνεχών.

Η $g(x)$ παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων

$$g'(x) = \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot (x^{\ln x})'}{(x^{\ln x})^2} = \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x}}{(x^{\ln x})^2} =$$

$$= \frac{x^{\ln x} \cdot \left(F'(x) - F(x) \cdot \frac{2 \ln x}{x} \right)}{(x^{\ln x})^2} \stackrel{(1)}{=} 0$$

Άρα η $g(x)$ είναι σταθερή, δηλαδή $g(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$

Δ2.

$$\text{I. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot (x-1)}{\ln x \cdot (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\ln x} \right] = 2$$

$$\text{γιατί: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 2$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\text{II. Για } x = 1: g(1) = c \Leftrightarrow \frac{F(1)}{1^{\ln 1}} = c \Leftrightarrow c = F(1)$$

Η F συνεχής στο $x = 1$ άρα

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot f(x)}{2 \cdot \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\ln x} \right] = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$\text{Άρα } c = 1 \text{ οπότε } \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1 \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x}.$$

$$\Delta 3. \quad F'(x) = x^{\ln x} \cdot 2 \cdot \frac{\ln x}{x}$$

$$F'(x) = 0 \stackrel{x^{\ln x} \neq 0}{\Leftrightarrow} \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$F'(x) > 0 \stackrel{x^{\ln x} > 0}{\Leftrightarrow} \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \stackrel{\ln x \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x > 1$$

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$		$\circ$	
$F(x)$			

Η F γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$

Η F γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Η F έχει ελάχιστο το $F(1) = 1$.

$$\bullet \text{ Αν } 0 < x^2 < x \leq 1 \stackrel{F \text{ γν. φθίνουσα}}{\Rightarrow} F(x^2) > F(x)$$

$$\text{Άρα } F(x) - F(x^2) < 0$$

- Αν $1 \leq x < x^2 \xRightarrow{F \text{ γν. αὐξουσα}} F(x) < F(x^2)$
 Άρα $F(x) - F(x^2) < 0$

Η εξίσωση γίνεται:

$$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \Leftrightarrow F(x) - F(x^2) = (x-1)^2$$

Ισχύει $F(x) - F(x^2) < 0$ για κάθε $x \neq 1$
 $(x-1)^2 > 0$ για κάθε $x \neq 1$

Άρα η εξίσωση είναι **Αδύνατη** για κάθε $x \neq 1$.

Το $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης οπότε είναι μοναδική στο $(0, +\infty)$.

Δ4. $E = \int_1^e |F(x)| dx$ με $F(x) > 0, \forall x \in [1, e]$

Άρα $E = \int_1^e F(x) dx = \int_1^e x^{\ln x} dx = \int_1^e (e^{\ln x \cdot \ln x}) dx = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx$

Από την ανισότητα $e^x \geq x+1$ αν βάλουμε όπου το x το $\ln^2 x$ προκύπτει
 $e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$ με το « $\Rightarrow$ » να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Άρα $\int_1^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx$

$$\int_1^e (\ln^2 x + 1) dx = \underbrace{\int_1^e \ln^2 x dx}_A + \underbrace{\int_1^e 1 dx}_B$$

- $B = \int_1^e 1 dx = [x]_1^e = e - 1$

- $A = \int_1^e (x)' \cdot \ln^2 x dx = [x \cdot \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x \cdot (\ln^2 x)' dx =$
 $= e \cdot \ln^2 e - 1 \cdot \ln^2 1 - \int_1^e x \cdot \frac{2 \cdot \ln x}{x} dx =$
 $= e - 2 \cdot \int_1^e (x)' \cdot \ln x dx = e - 2 \cdot \left\{ [x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot (\ln x)' dx \right\}$
 $= e - 2 \cdot \left\{ e \cdot \ln^1 e - 1 \cdot \ln^0 1 - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \right\} =$
 $= e - 2 \cdot e + 2 \cdot [x]_1^e = -e + 2 \cdot (e - 1) = -e + 2 \cdot e - 2 = e - 2$

Άρα $\int_1^e e^{\ln^2 x} dx = e - 2 + e - 1 = 2 \cdot e - 3$

Άρα $E > 2 \cdot e - 3$.