

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 5

A3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι “1–1”, αν και μόνο αν υπάρχουν διαφορετικά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.
- β)** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
- γ)** Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- δ)** Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

ε) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ και

$$\text{ισχύει } (\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = 2 \ln(x-1)$$

και

$$g : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = \sqrt{x-2} + 1.$$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

Μονάδες 8

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $h(x) = \ln(x-2)$, $x \in (2, +\infty)$.

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να προσδιορίσετε τη συνάρτηση h^{-1} (μονάδες 6).

Μονάδες 9

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}$$

με $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

- Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
- Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στην αρχή των αξόνων.

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

i) $\kappa = 0$ και

ii) $\mu = 1$.

Μονάδες 8

Γ2. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (μονάδες 6).

ii) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (μονάδες 3) και

να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 11

Γ3. Για $\nu \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx$.

i) Να αποδείξετε ότι $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

ii) Να υπολογίσετε τα I_0 , I_1 , και I_2 .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

- $0 < g(x) < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-1, 0)$ ώστε:

$$g(x_1) + x_1 = 0.$$

Μονάδες 6

Δίνεται επιπλέον η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x)+x), & (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - \kappa x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

με $\kappa \in \mathbb{R}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 2

Δ3. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύουν:

- $f(x) \geq 0$ και (μονάδες 4)
- η εξίσωση $3f(x) = \pi$ έχει ακριβώς μια ρίζα, x_2 . (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ4. i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ στο διάστημα $[x_1, 0]$. (μονάδες 3)

ii) Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = x_1$ και $x = f(x_2)$, όπου x_1 είναι ο αριθμός από το ερώτημα Δ1 και x_2 είναι η ρίζα από το ερώτημα Δ3ii. Αν ο άξονας $y'y$ χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία, να αποδείξετε ότι:

$$I \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3 \ln 2 - 3.$$

(Μονάδες 7)

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις, είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Α2. ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$$

Τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

Α3. ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

A4. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = 2 \ln(x-1), g(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

B1. $D_f = (1, +\infty)$ $D_g = [2, +\infty)$
Πρέπει $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$, άρα :
 $x \in [2, +\infty)$ και $\sqrt{x-2} + 1 \in (1, +\infty)$

Δηλαδή $x \geq 2$ και $(\sqrt{x-2} + 1 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} > 0 \Leftrightarrow x > 2)$
άρα $D_{f \circ g} = (2, +\infty)$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \ln(g(x) - 1) = 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = \\ = 2 \ln \sqrt{x-2} = 2 \ln(x-2)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln(x-2),$$

Άρα $(f \circ g)(x) = \ln(x-2)$, για $x > 2$

B2. $h(x) = \ln(x-2), x > 2$

$$h'(x) = (\ln(x-2))' = \frac{1}{x-2} > 0, \forall x > 2$$

Έτσι h είναι γνησίως αύξουσα, άρα και h^{-1} , επομένως υπάρχει h^{-1}

$$D_{h^{-1}} = \Sigma T_h = h((2, +\infty)) \stackrel{h \text{ γν. αύξ.}}{=} (\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)) = \mathbb{R}$$

αφού

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) &\stackrel{u_0=0}{u=x-2}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \ln u = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) &\stackrel{u_0=+\infty}{u=x-2}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{Ισχύει } h(x) = y \Leftrightarrow x = h^{-1}(y)$$

Έτσι $h(x) = y$, με $y \in \mathbb{R}$

$$\ln(x-2) = y$$

$$x-2 = e^y$$

$$x = e^y + 2, y \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Επομένως } h^{-1}(y) = e^y + 2, y \in \mathbb{R}.$$

$$\text{B3. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2}{x-1}}{1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = (-\infty) \cdot 2 = -\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}$

Αφού f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ πρέπει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$

Αν $\kappa \neq 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x$.

- Αν $\kappa > 0$ τότε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = +\infty$, άτοπο.

- Αν $\kappa < 0$ τότε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = -\infty$, άτοπο.

Άρα είναι $\kappa = 0$, οπότε είναι $f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$.

$$f'(x) = \left(\frac{\mu x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{\mu \cdot (x^2 + 1) - \mu x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu x^2 + \mu - 2\mu x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-\mu x^2 + \mu}{(x^2 + 1)^2}$$

Αφού $y = x$ εφαπτομένη της C_f στο 0 $(0, 0)$ πρέπει:

$$f'(0) = 1 \Rightarrow \frac{\mu}{1} = 1 \Rightarrow \mu = 1.$$

Γ2. Έχουμε $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, D_f = \mathbb{R}$

i) $f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	$\circ$	$\circ$	-
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

- Σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$ η f είναι γν. φθίνουσα.
- Στο διάστημα $[-1, 1]$, f είναι γν. αύξουσα.
- στο $x_1 = -1$ τ. ελάχιστο $f(-1) = -\frac{1}{2}$
- στο $x_2 = 1$ τ. μέγιστο $f(1) = \frac{1}{2}$

ii) Έστω $\Delta_1 = (-\infty, -1], \Delta_2 = (-1, 1], \Delta_3 = (1, +\infty)$

- $f(\Delta_1) = f((-\infty, -1]) \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{=} [f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [-\frac{1}{2}, 0]$
- $f(\Delta_2) = f((-1, 1]) \stackrel{f \text{ γν.αύξ.}}{=} (\lim_{x \rightarrow -1} f(x), f(1)] = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- $f(\Delta_3) = f(1, +\infty) \stackrel{f \text{ γν.φθ.}}{=} (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)) = (0, \frac{1}{2})$

$$\text{Άρα } \Sigma. T. f = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

iii) $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2, \alpha \in \mathbb{R}$:

Αφού $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

- $a^2 + \frac{1}{2} \notin f(\Delta_1)$ άρα η εξίσωση ΔΕΝ έχει ρίζα στο Δ_1 .
- $a^2 + \frac{1}{2} \in f(\Delta_2)$ (για $\alpha = 0$) άρα η εξίσωση έχει 1 μόνο ρίζα στο Δ_2 την $x = 1$ (αφού f γν. αύξουσα στο Δ_2).
- $a^2 + \frac{1}{2} \notin f(\Delta_3)$ άρα η εξίσωση ΔΕΝ έχει ρίζα στο Δ_3 .

Επομένως η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ έχει 1 ΜΟΝΟ ρίζα την $x = 1$.

Γ3. $I_v = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx$

$$\begin{aligned} \text{i) } I_v + I_{v+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2(v+1)+1}}{x^2+1} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}(1+x^2)}{x^2+1} dx = \\ &= \int_0^1 x^{2v+1} dx = \left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2v+2} - 0 \Rightarrow \\ I_v + I_{v+1} &= \frac{1}{2v+2} \quad (1) \end{aligned}$$

ii) $I_0 \stackrel{v=0}{=} \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx \stackrel{\substack{du=2x dx \\ u=x^2+1}}{=} \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}}{u} du =$

$$= \frac{1}{2} [\ln|u|]_1^2 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$(1) \xrightarrow{v=0} I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln 2 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$I_1 = \frac{1-\ln 2}{2}$$

$$(1) \xrightarrow{v=1} I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1 - \ln 2}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow I_2 = \frac{1 - 2 + 2 \ln 2}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{2 \ln 2 - 1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

g παραγωγίσιμη, g' συνεχής

$$0 < g(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g'(x) \neq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Έστω $h(x) = g(x) + x$

Η $h(x)$ συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών

$$h(-1) = g(-1) - 1 < 0$$

$$h(0) = g(0) > 0$$

$$h(0) \cdot h(1) < 0$$

Από Θ. Bolzano, υπάρχει $x_1 \in [-1, 0]; h(x_1) = 0 \Rightarrow g(x_1) + x_1 = 0$

$$h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$$

και h' συνεχής, άρα η h' διατηρεί πρόσημο.

Άρα η h γνησίως μονότονη, επομένως η ρίζα είναι μοναδική.

$$\Delta 2. \quad f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - \kappa x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x(g(x) + x)) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - \kappa x}{x} = \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x \cdot \sigma\upsilon\nu x} - \kappa)) = \\ = 2 + 1 - \kappa = 3 - \kappa.$$

$$\text{Άρα } 3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3.$$

Δ3. i)

Για $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ είναι: $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x$.

Θα δείξουμε ότι $f(x) \geq 0$, στο $[0, \frac{\pi}{2})$. Πράγματι:

$$f \text{ είναι παραγωγίσιμη με } f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sigma\upsilon\nu^3x + 1 - 3\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3x - 3\sigma\upsilon\nu^2x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2x} = \\
&= \frac{2\sigma\upsilon\nu^3x - 2\sigma\upsilon\nu^2x - \sigma\upsilon\nu^2x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2x} = \\
&= \frac{2\sigma\upsilon\nu^2x(\sigma\upsilon\nu x - 1) + (1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2x} = \\
&= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu^2x - 1 - \sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2x} \\
&= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot 2 \cdot (\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot (\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2})}{\sigma\upsilon\nu^2x} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 \cdot (\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2})}{\sigma\upsilon\nu^2x} \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, \frac{\pi}{2}), \text{ με την ισότητα να ισχύει μόνο για } x = 0.$$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2})$

$$\text{Για } x \geq 0 \xRightarrow{f \text{ γν. αυξ.}} f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$$

ii) Έχουμε την εξίσωση $f(x) = \frac{\pi}{3}$

$$\S.T._f = f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{=} \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0, +\infty)$$

Αφού

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) = 2 \cdot 1 + (+\infty) - \frac{3\pi}{2} = +\infty$$

και αφού $\frac{\pi}{3} \in \Sigma.T.f$ και f γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2})$

Άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{\pi}{3}$ έχει μία μόνο ρίζα, την $x_2 \in [0, \frac{\pi}{2})$.

Δ4. i) Έστω $h(x) = g(x) + x$.

Τότε $h(0) = g(0) > 0$ και $h(x_1) = g(x_1) + x_1 = 0$

$h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ αφού h' συνεχής. Άρα η $h'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Αν $h'(x) < 0 \Rightarrow h$ γν. φθίνουσα, οπότε

$x_1 < 0 \xrightarrow{h \text{ γν. φθ.}} h(x_1) > h(0) = g(0) > 0 \Rightarrow 0 > 0$. Άτοπο

Άρα $h'(x) > 0 \Rightarrow h$ γν. αύξουσα. Τότε για $x \in [x_1, 0]$ είναι $x \geq x_1 \xrightarrow{h \text{ γν. αύξ.}} \Rightarrow$

$h(x) \geq h(x_1) = 0 \Rightarrow g(x) + x \geq 0$ και αφού $x^2 > 0$ έπεται

$x^2(g(x) + x) \geq 0$ στο $[x_1, 0) \Rightarrow f(x) \geq 0$ στο $[x_1, 0)$.

ii) $E(\Omega) = \int_{x_1}^{f(x_2)} f(x) dx$ με $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ και $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [x_1, \frac{\pi}{3}]$.

Άρα $E(\Omega) = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$ και ισχύει $\int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$ (1)

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx &= [x^3 g(x)]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 3x^2 g(x) dx = \\ &= -x_1^3 g(x_1) - \int_{x_1}^0 3 \cdot (f(x) - x^3) dx = x_1^4 - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx + \int_{x_1}^0 3x^3 dx \\ &= x_1^4 - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx + 3 \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x_1}^0 = x_1^4 - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx - 3 \frac{x_1^4}{4} \\ &= \frac{x_1^4}{4} - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx \stackrel{(1)}{=} \frac{x_1^4}{4} - 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx. \end{aligned}$$

Ομώς:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x) dx \\ &= \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= -2 \cdot \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} + 2 = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} - 3 \left(1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \right) = \frac{x_1^4}{4} - 3 - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2}.$$