

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 23 Ιανουαρίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδες 51-52 Θεώρημα IV

Α2. Σελίδα 49

- Α3. α) Λ
β) Σ
γ) Λ
δ) Σ
ε) Σ

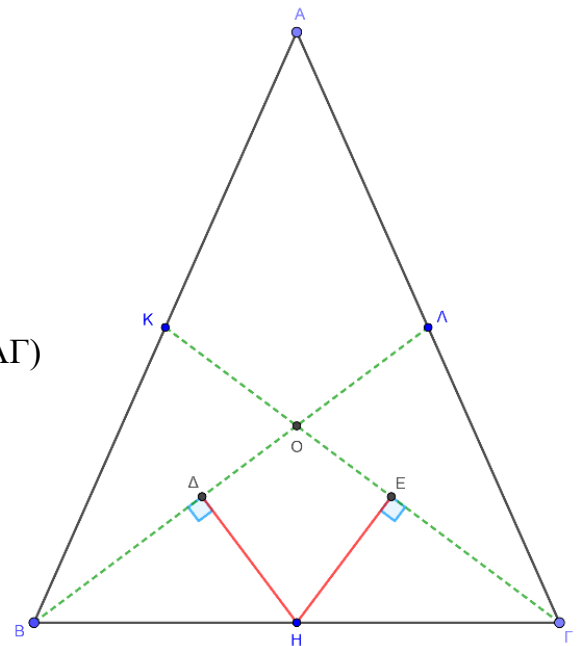
ΘΕΜΑ Β

Β1. Φέρνουμε τις διαμέσους ΒΛ, ΓΚ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΚΓ και ΒΛΓ :

- $BK = GL$ (ως μισά των ίσων πλευρών AB, AG)
- $\widehat{KBG} = \widehat{GLB}$ (ABG ισοσκελές)
- $BG = BG$ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας (ΠΓΠ) είναι ίσα.

Οπότε και $BL = GK$.

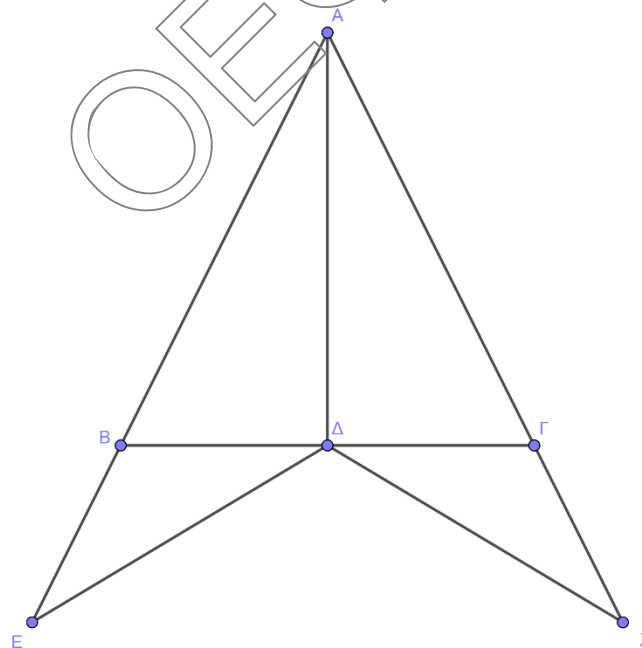
B2. Από το ερώτημα **B1** τα τρίγωνα $BΓΚ$ και $ΒΛΓ$ είναι ίσα, άρα και οι γωνίες $\widehat{ΟΒΓ}$ και $\widehat{ΟΓΒ}$ είναι ίσες. Οπότε το τρίγωνο $ΒΟΓ$ είναι ισοσκελές.

B3. Φέρνουμε από το σημείο H τις αποστάσεις προς τις διαμέσους $ΒΛ$ και $ΓΚ$. Έστω Δ και E οι προβολές του H προς τις διαμέσους. Συγκρίνοντας τα ορθογώνια τρίγωνα $ΒΔΗ$ και $ΗΕΓ$ προκύπτει:

- $BH = HG$ (H μέσο $BΓ$)
- $\widehat{ΗΒΔ} = \widehat{ΗΓΕ}$ (το τρίγωνο $ΒΟΓ$ είναι ισοσκελές)

Οπότε από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (υποτείνουσα και οξεία γωνία αντίστοιχα μία προς μία ίσες) είναι ίσα. Άρα: $HΔ = HE$.

ΘΕΜΑ Γ



Γ1. Τα τρίγωνα $ΑΕΔ$ και $ΑΔΖ$ έχουν:

- $ΑΕ=ΑΖ$ (υπόθεση)
- $\widehat{ΕΑΔ} = \widehat{ΖΑΔ}$ ($ΑΔ$ διχοτόμος)
- $ΑΔ=ΑΔ$ (κοινή πλευρά)

άρα από κριτήριο ισότητας (ΠΓΠ) είναι ίσα.

Γ2. Τα τρίγωνα $\triangle AED$ και $\triangle ADZ$ είναι ίσα οπότε προκύπτει ότι:

- $AE = AZ$ (1) και
- $\hat{AED} = \hat{AZD}$, άρα και $\hat{BED} = \hat{GZD}$ (2)

Τα τρίγωνα $\triangle BED$ και $\triangle GZD$ είναι ισοσκελή ($BE = BD$ και $GD = GZ$) με:

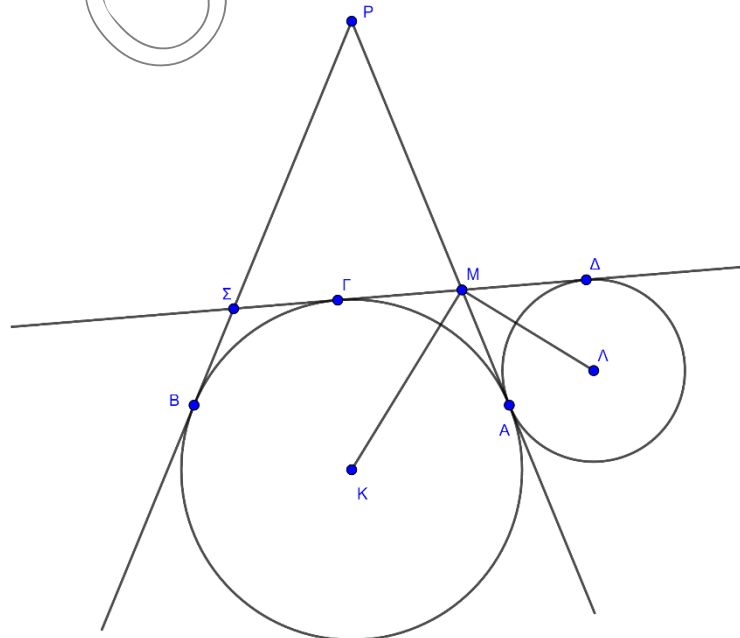
$$\hat{BDE} = \hat{BED} \text{ και } \hat{GZD} = \hat{GZD} \text{ (3).}$$

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $\triangle BED$ και $\triangle GZD$ έχουμε ότι:

- $AE = AZ$ (από (1))
- $\hat{BED} = \hat{GZD}$ (από (2))
- $\hat{BDE} = \hat{GZD}$ (από (2) και (3))
άρα είναι ίσα από το κριτήριο ισότητας (ΓΠΓ).

Γ3. Έχει αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $\triangle BED$, $\triangle GZD$ είναι ίσα, οπότε $BD = GD$, άρα AD διάμεσος στο $\triangle ABG$. Επειδή δίνεται ότι AD διχοτόμος, το τρίγωνο $\triangle ABG$ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Δ



Δ1. Έχουμε ότι:

- $MA = MG$ (εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο (K, R))
- $MA = MD$ (εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο (Λ, ρ))

Από τις ισότητες αυτές προκύπτει ότι $MG = MD$, δηλαδή M μέσο του GD .

Δ2. Η διακεντρική ευθεία $ΜΚ$ διχοτομεί την γωνία των εφαπτομένων $ΜΓ$ και $ΜΑ$ ενώ η $ΜΛ$ διχοτομεί την γωνία των εφαπτομένων $ΜΑ$ και $ΜΔ$. Οι γωνίες $\widehat{ΓΜΑ}$ και $\widehat{ΑΜΔ}$ είναι παραπληρωματικές οπότε $\widehat{ΓΜΑ} + \widehat{ΑΜΔ} = 180^\circ$ άρα $\widehat{ΚΜΑ} + \widehat{ΑΜΛ} = 90^\circ$ δηλαδή η γωνία $\widehat{ΚΜΛ}$ είναι ορθή.

Δ3. Είναι:

- $\Sigma Γ = \Sigma Β$
- $\Gamma Μ = Μ Α$
- $Ρ Α = Ρ Β$ (ως εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο $(Κ, R)$)

Οπότε:

$$Ρ Σ + \Sigma Μ + Ρ Μ = Ρ Σ + \Sigma Γ + \Gamma Μ + Ρ Μ = (Ρ Σ + \Sigma Β) + (Μ Α + Ρ Μ) = Ρ Β + Ρ Α = Ρ Α + Ρ Α = 2 Ρ Α = 2 Ρ Β.$$

Δ4. Από τριγωνική ανισότητα στα τρίγωνα $Β Σ Γ$, $\Gamma Μ Α$ ισχύει ότι:

- $Β Γ < \Sigma Β + \Sigma Γ \Rightarrow Β Γ < \Sigma Γ + \Sigma Γ$ οπότε $Β Γ < 2 \Sigma Γ$ (1)
- $Α Γ < \Gamma Μ + Μ Α \Rightarrow Α Γ < \Gamma Μ + \Gamma Μ$ οπότε $Α Γ < 2 \Gamma Μ$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$Β Γ + Α Γ < 2(\Sigma Γ + \Gamma Μ) \Rightarrow Β Γ + Α Γ < 2 \Sigma Μ.$$