

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023**
Β' ΦΑΣΗ**E_3.Γλ1Α(α)****ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ****ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ****Ημερομηνία: Σάββατο 6 Μαΐου 2023****Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες****ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ****ΘΕΜΑ Α****A1.** Σελίδα 88 σχολικού βιβλίου**A2. α)** Σωστό**β)** Λάθος**γ)** Σωστό**δ)** Λάθος**ε)** Λάθος**ΘΕΜΑ Β****B1.****1^η Λύση:**Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $EB\Gamma$ και $\Delta\Gamma B$

- $BE = \Gamma\Delta$ (υπόθεση)
- $\widehat{EB\Gamma} = \widehat{\Delta\Gamma B}$ (το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές)
- $B\Gamma$ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $B\Delta = \Gamma E$.**2^η Λύση:**Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Gamma$

- $A\Delta = AE$ (Διαφορά ίσων τμημάτων: $A\Delta = A\Gamma - \Delta\Gamma$ και $AE = AB - EB$)
- $\widehat{B\Delta A} = \widehat{E\Gamma A}$ (κοινή γωνία)
- $AB = A\Gamma$ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $B\Delta = \Gamma E$.

B2.

1^η Λύση:

Έχουμε $AE = AD$ ως διαφορά ίσων τμημάτων, οπότε από υπόθεση ισχύει
 $AE = AD = EH = DZ$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AEH και ADZ

- $EH = DZ$
- $AE = AD$
- $\hat{H}EA = \hat{Z}DA$ (ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών $\hat{B}EG$ και $\hat{G}AB$)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $AH = AZ$

2^η Λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα HAG και AZB

- $HG = ZB$ (άθροισμα ίσων τμημάτων: $HG = HE + EG$ και $BZ = DZ + BD$)
- $\hat{A}GH = \hat{A}BZ$ (από την σύγκριση στο B1 με την 2^η Λύση)
- $AG = AB$ (το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $AH = AZ$.

B3. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα HOG και ZIB

- $\hat{H}OG = \hat{Z}IB = 90^\circ$
- $HG = ZB$ ($HG = HE + EG$ και $ZB = ZD + DB$)
- $\hat{H}GO = \hat{Z}BI$ (από την ισότητα των τριγώνων BEG και GAB)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία) τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε
 $HO = ZI$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το τρίγωνο BGE είναι ισόπλευρο άρα η γωνία $\hat{EBG} = 60^\circ$

Το τρίγωνο ABD είναι ισόπλευρο άρα και η γωνία $\hat{ABD} = 60^\circ$

Άρα $AD // BE$ διότι οι εντός εκτός και επι ταυτά γωνίες που σχηματίζονται από αυτές και την ευθεία (ε) είναι ίσες.

Γ2. Έχουμε $ΑΔ // ΒΕ$ άρα $ΗΔ // ΒΕ$. Επίσης το τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι ισόπλευρο άρα η $ΒΗ$ ως ύψος είναι και διάμεσος, οπότε

$$ΗΔ = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{2ΒΓ}{2} = ΒΓ = ΒΕ \text{ (επειδή το } ΒΕΓ \text{ τρίγωνο ισόπλευρο)}$$

Συνεπώς το τετράπλευρο $ΗΔΕΒ$ είναι παραλληλόγραμμο (έχει 2 πλευρές παράλληλες και ίσες) και επειδή $\hat{Η} = 90^\circ$ είναι ορθογώνιο.

Γ3. Στο τρίγωνο $ΑΔΖ$ έχουμε $ΗΒ // ΔΕ$ άρα $ΗΒ // ΔΖ$ και επειδή $Η$ το μέσο της $ΑΔ$ έχουμε ότι $Β$ το μέσο της $ΑΖ$.

Γ4. Στο τρίγωνο $ΑΔΖ$ έχουμε $Β$ το μέσο της $ΑΖ$ και $ΒΕ // ΑΔ$ ($ΗΔΕΒ$ παραλληλόγραμμο) άρα το $Ε$ είναι το μέσο της $ΔΖ$.

Το $ΗΕ$ ενώνει τα δύο μέσα των πλευρών $ΑΔ$ και $ΔΖ$ του τριγώνου $ΑΔΖ$ άρα $ΗΕ // ΑΖ$ άρα $ΗΕ // ΑΓ$ οπότε το $ΑΗΕΓ$ είναι τραπέζιο και επειδή

$$ΑΗ = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{2ΒΓ}{2} = ΒΓ = ΕΓ \text{ το } ΑΗΕΓ \text{ είναι ισοσκελές τραπέζιο.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι ισοσκελές, συνεπώς $\hat{ΑΒΔ} = \hat{ΑΔΒ}$

Το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι τραπέζιο συνεπώς $ΑΒ // ΔΓ$ άρα

$$\hat{ΑΒΔ} = \hat{ΒΔΓ} \text{ ως εντός εναλλάξ.}$$

Άρα ισχύει ότι $\hat{ΑΔΒ} = \hat{ΒΔΓ}$, οπότε $\hat{ΑΔΓ} = 2\hat{ΒΔΓ}$ όμως από υπόθεση

$$\hat{ΑΔΓ} = 2\hat{ΒΓΔ} \text{ άρα } 2\hat{ΒΓΔ} = 2\hat{ΒΔΓ} \Leftrightarrow \hat{ΒΓΔ} = \hat{ΒΔΓ} \text{ άρα το τρίγωνο } ΔΒΓ$$

είναι ισοσκελές συνεπώς $ΔΒ = ΒΓ$.

Δ2. Έχουμε $ΔΒ = ΒΕ$ άρα στο τρίγωνο $ΕΓΔ$ η $ΓΒ$ είναι διάμεσος και για αυτήν

$$\text{ισχύει: } ΓΒ = ΔΒ = \frac{ΔΕ}{2}. \text{ Άρα το τρίγωνο } ΕΓΔ \text{ είναι ορθογώνιο διότι η}$$

διάμεσος ισούται με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί συνεπώς

$$\hat{ΕΓΔ} = 90^\circ \text{ άρα } ΕΓ \perp ΔΓ$$

- Δ3.** Η γωνία $\widehat{E\hat{B}\Gamma}$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B\Delta\Gamma$ οπότε έχουμε
 $\widehat{E\hat{B}\Gamma} = \widehat{B\hat{\Delta}\Gamma} + \widehat{B\hat{\Gamma}\Delta} = 2\widehat{B\hat{\Delta}\Gamma} = 2\widehat{A\hat{B}\Delta}$
- Δ4.** Το τετράπλευρο $AB\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο διότι $AZ // B\Gamma$ και $AB // Z\Gamma$ άρα $AZ = B\Gamma$. Από Δ1 το $B\Delta = B\Gamma$ άρα $AZ = B\Gamma = B\Delta$ (1).
Το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι τραπέζιο διότι $AB // \Delta Z$ και έχει ίσες διαγώνιες $AZ = B\Delta$ (σχέση (1)) συνεπώς είναι ισοσκελές τραπέζιο άρα $A\Delta = BZ$ όμως από υπόθεση έχουμε $A\Delta = AB$ άρα $AB = BZ$

