

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025**
Β' ΦΑΣΗ**E_3.Γλ1Α(α)****ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ****ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ****Ημερομηνία: Σάββατο 3 Μαΐου 2025****Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες****ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ****ΘΕΜΑ Α****A1.** Σελίδα 89 σχολικού βιβλίου.

- A2.** α) Λάθος.
β) Σωστό.
γ) Σωστό.
δ) Λάθος.
ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

B1. Επειδή η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος έχουμε ότι $Β\hat{A}Δ = Δ\hat{A}Γ$ συνεπώς $Β\hat{A}Δ = 40^\circ$
και τότε $Β\hat{A}Γ = Β\hat{A}Δ + Δ\hat{A}Γ = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ$.

Στο τρίγωνο $ΒΑΔ$ έχουμε:

$$Δ\hat{B}A + Β\hat{A}Δ + Α\hat{D}B = 180^\circ \Leftrightarrow Δ\hat{B}A + 40^\circ + 80^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow Δ\hat{B}A = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ \Leftrightarrow Δ\hat{B}A = 60^\circ.$$

Στο τρίγωνο $ΑΔΓ$ η γωνία $Α\hat{D}B$ είναι εξωτερική συνεπώς

$$Α\hat{D}B = Δ\hat{A}Γ + Α\hat{Γ}Δ \Leftrightarrow 80^\circ = 40^\circ + Α\hat{Γ}Δ \Leftrightarrow Α\hat{Γ}Δ = 80^\circ - 40^\circ \Leftrightarrow Α\hat{Γ}Δ = 40^\circ.$$

Εναλλακτικά β τρόπος για τον υπολογισμό της $\hat{\Gamma}$:

Για την γωνία $Α\hat{\Gamma}Δ$ έχουμε ότι στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει:

$$Β\hat{A}Γ + Γ\hat{B}A + Α\hat{\Gamma}B = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 60^\circ + Α\hat{\Gamma}B = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow Α\hat{\Gamma}B = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ \Leftrightarrow Α\hat{\Gamma}B = 40^\circ.$$

Εναλλακτικά γ τρόπος για τον υπολογισμό της $\hat{\Gamma}$:

Οι γωνίες $\hat{A}\hat{D}B$, $\hat{A}\hat{D}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές, άρα θα ισχύει:

$$\hat{A}\hat{D}B + \hat{A}\hat{D}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{D}\Gamma = 180^\circ - \hat{A}\hat{D}B \Leftrightarrow \hat{A}\hat{D}\Gamma = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$

Οπότε στο τρίγωνο $\Delta\hat{A}\Gamma$ έχουμε: $\hat{A}\hat{\Gamma}\Delta + \hat{\Delta}\hat{A}\Gamma + \hat{A}\hat{D}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow$
 $\hat{A}\hat{\Gamma}\Delta + 40^\circ + 100^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ.$

Άρα στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει: $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$.

Ομοίως και στο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ έχουμε ίσες τις αντίστοιχες γωνίες με το τρίγωνο $AB\Gamma$.

B2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A'B'\Delta'$

- $\hat{B}\hat{A}\Delta = \hat{B}'\hat{A}'\Delta' = 40^\circ$.
- $A\Delta = A'\Delta'$ (υπόθεση).
- $\hat{A}\hat{D}B = \hat{A}'\hat{D}'B' = 80^\circ$.

Από το κριτήριο ισότητας ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $AB = A'B'$ και $A\Delta = A'\Delta'$.

B3. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$

- $\hat{A}\hat{B}\Gamma = \hat{A}'\hat{B}'\Gamma' = 60^\circ$.
- $AB = A'B'$ (από το B2. ερώτημα).
- $\hat{B}\hat{A}\Gamma = \hat{B}'\hat{A}'\Gamma' = 80^\circ$.

Από το κριτήριο ισότητας ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Εναλλακτικά β τρόπος:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\Delta\hat{A}\Gamma$ και $\Delta'\hat{A}'\Gamma'$

- $\hat{\Delta}\hat{A}\Gamma = \hat{\Delta}'\hat{A}'\Gamma' = 40^\circ$ (υπόθεση).
- $A\Delta = A'\Delta'$ (από το B2. ερώτημα).
- $\hat{A}\hat{D}\Gamma = \hat{A}'\hat{D}'\Gamma' = 100^\circ$ (παραπληρωματικές ίσων γωνιών).

Από το κριτήριο ισότητας ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $A\Gamma = A'\Gamma'$ (1).

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$

- $AG = A'\Gamma'$ (από σχέση (1)).
- $AB = A'B'$ (από το Β2. ερώτημα).
- $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{B}'\hat{A}'\hat{\Gamma}' = 80^\circ$.

Από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $AE\Gamma$ και $DE\Gamma$

- $\hat{A}\hat{E}\hat{\Gamma} = \hat{D}\hat{E}\hat{\Gamma} = 90^\circ$.
- $AE = ED$ (υπόθεση).
- $E\Gamma$ (κοινή πλευρά).

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (δύο ομόλογες πλευρές ίσες) τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε $AG = GD$.

Εναλλακτικά β τρόπος:

Στο τρίγωνο AGD η GE είναι ύψος και διάμεσος συνεπώς είναι ισοσκελές, οπότε $AG = GD$.

Γ2. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AE\Gamma$ η EM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην

υποτείνουσα, συνεπώς $EM = \frac{AG}{2}$.

Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο $DE\Gamma$ η EN είναι διάμεσος που αντιστοιχεί

στην υποτείνουσα, συνεπώς $EN = \frac{GD}{2}$.

Όμως αποδείξαμε ότι $AG = GD$ άρα $EM = EN$ (ως μισά ίσων τμημάτων), συνεπώς το τρίγωνο MNE είναι ισοσκελές.

Εναλλακτικά β τρόπος:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AME και DNE

- $AM = DN$ (ως μισά ίσων τμημάτων).
- $\hat{M}\hat{A}\hat{E} = \hat{N}\hat{D}\hat{E}$ (ως γωνίες στην βάση του ισοσκελούς τριγώνου AGD).
- $AE = DE$ (υπόθεση).

Από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $EM = EN$,
συνεπώς το τρίγωνο MNE είναι ισοσκελές.

Γ3. Στο τρίγωνο $ΑΔΓ$ έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} M \text{ μέσο } ΑΓ \\ N \text{ μέσο } ΓΔ \end{array} \right\} \Leftrightarrow MN \parallel ΑΔ \Leftrightarrow MN \parallel ΑΕ \text{ και } MN = \frac{ΑΔ}{2} \Leftrightarrow MN = ΑΕ$$

Άρα το τετράπλευρο $MNEA$ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες
συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο.

Γ4. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΕΓ$ έχουμε ότι η $\hat{ΑΓΕ} = 30^\circ$ οπότε

$$ΑΕ = \frac{ΑΓ}{2} \Leftrightarrow ΑΕ = ΑΜ.$$

Επίσης αποδείξαμε ότι $ΑΕ = ΜΝ$, άρα ισχύει $ΑΜ = ΜΝ$.

Όμως το τετράπλευρο $MNEA$ είναι παραλληλόγραμμο συνεπώς $ΑΜ = ΕΝ$.

Άρα ισχύει $ΜΝ = ΕΝ$.

Όμως το τρίγωνο MNE είναι ισοσκελές, συνεπώς $ΕΝ = ΕΜ$.

Τελικά ισχύει $ΜΝ = ΕΝ = ΕΜ$, δηλαδή το τρίγωνο MNE είναι ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο τρίγωνο $ΑΒΔ$ η $ΑΗ$ είναι ύψος και διχοτόμος συνεπώς είναι ισοσκελές,
οπότε η $ΑΗ$ είναι και διάμεσος άρα $ΒΗ = ΗΔ$.

Εναλλακτικά β τρόπος:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΒΗ$ και $ΑΗΔ$

- $\hat{ΑΗΒ} = \hat{ΑΗΔ} = 90^\circ$.
- $\hat{ΒΑΗ} = \hat{ΗΑΔ}$ ($ΑΗ$ διχοτόμος).
- $ΑΗ$ (κοινή πλευρά).

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (μία αντίστοιχη πλευρά ίση
και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση) τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε $ΒΗ = ΗΔ$.

Επίσης από την υπόθεση έχουμε ότι $ΑΗ = ΗΖ$ άρα στο τετράπλευρο $ΑΒΖΔ$

οι διαγώνιοί του διχοτομούνται συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο.
Επιπλέον έχουμε ότι $AZ \perp BD$, δηλαδή οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα,
συνεπώς το τετράπλευρο $ABZD$ είναι ρόμβος.

Δ2. Επειδή το τετράπλευρο $ABZD$ είναι ρόμβος έχουμε ότι $A\hat{D}Z = A\hat{B}Z$.

Επίσης ισχύει $A\hat{B}Z = A\hat{B}\Gamma + \Gamma\hat{B}Z$ (1).

Όμως $\Gamma\hat{B}Z = A\hat{\Gamma}B$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Gamma$ και BZ που τέμνονται από την $B\Gamma$.

Συνεπώς η σχέση (1) γίνεται $A\hat{B}Z = A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B$.

Δ3. Στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ έχουμε:

$\left. \begin{array}{l} \text{Η μέσο } B\Delta \\ \Theta \text{ μέσο } B\Gamma \end{array} \right\} \Leftrightarrow H\Theta // \Delta\Gamma$, όμως $\Delta\Gamma // BZ$ διότι το $ABZD$ είναι ρόμβος.

Συνεπώς $H\Theta // BZ$ άρα το τετράπλευρο $HBZ\Theta$ είναι τραπέζιο.

Δ4. Έστω $K\Lambda$ η διάμεσος του τραpezίου $HBZ\Theta$ τότε ισχύει: $K\Lambda = \frac{BZ + H\Theta}{2}$.

Το τετράπλευρο $ABZD$ είναι ρόμβος συνεπώς $BZ = A\Delta$.

Επίσης στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ έχουμε ότι $H\Theta = \frac{\Delta\Gamma}{2}$ συνεπώς ισχύει:

$$K\Lambda = \frac{BZ + H\Theta}{2} = \frac{A\Delta + \frac{\Delta\Gamma}{2}}{2} = \frac{\frac{2A\Delta + \Delta\Gamma}{2}}{2} = \frac{2A\Delta + \Delta\Gamma}{4} = \frac{A\Delta + A\Delta + \Delta\Gamma}{4} \stackrel{A\Delta=AB}{\Leftrightarrow}$$

$$K\Lambda = \frac{AB + A\Delta + \Delta\Gamma}{4} = \frac{AB + A\Gamma}{4}.$$